

Consignes de travail pendant les grandes vacances

Bienvenue à tous en MP. Bien commencer l'année en MP est important, et pour cela, il est essentiel d'arriver un peu préparé. Voici ci-dessous quelques suggestions de travail pour les vacances d'été. N'hésitez pas également à consulter ma page web, ou à m'écrire si vous avez des questions (adresses ci-dessus). N'oubliez pas d'indiquer dans le message que vous êtes l'un de mes futurs élèves. Je risque cependant d'être déconnecté de mon courrier pendant certaines périodes des vacances.

Se vider l'esprit...

La chose la plus importante est certainement de se reposer, et de faire un vrai break. Cela n'empêche pas de joindre l'utile à l'agréable : lire vos oeuvres au programme, pratiquer les langues étrangères, par exemple en voyage etc. Ce repos est essentiel c'est le dernier avant les concours.

... organiser ses affaires...

Rangez, triezy, organisez. Le maître mot l'année prochaine sera « efficacité ». Il faut pour cela que vous puissiez consulter vos cours passés, sans perdre de temps à fouiller toute votre chambre pour trouver les pages qui vous intéressent. Il faut un rangement rationnel et facilement accessible. Éventuellement des intercalaires ou des post-its (bien référencés) pour retrouver facilement le début de chaque chapitre.

... et se remplir l'esprit.

Il n'est pas envisageable d'arriver en septembre en MP sans avoir revu le cours de MPSI. Vous devez être au point sur toutes les techniques calculatoires : le rythme sera soutenu en deuxième année, nous n'aurons pas le temps de nous attarder sur les points techniques supposés être acquis. Les notions importantes du cours de MPSI, et les énoncés exacts et précis des résultats principaux doivent être connus. Pas appris par coeur mot à mot, mais compris à la fois intuitivement et rigoureusement. Les théorèmes doivent pouvoir être restitués, de façon précise, avec leurs hypothèses, en ayant compris sur des exemples et contre-exemples (à garder en tête) pourquoi ces hypothèses doivent être posées. Votre connaissance des méthodes calculatoires et du cours sera évaluée à la rentrée, par une interrogation (sans doute 2h) la semaine de la rentrée.

Techniques calculatoires à maîtriser pour l'interrogation de rentrée

- **Techniques sommatoires finies :**
 - * manipulations de sommes finies,
 - * changements d'indices simples,
 - * interversions de signes sommes sur un pavé, sur un triangle,
 - * sommes classiques (géométrique, entiers, carré et cubes consécutifs, binôme etc),
- **Manipulations des nombres complexes, et trigonométrie :**
 - * passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique et réciproquement,
 - * forme algébrique d'un quotient de complexes eux-mêmes sous forme algébrique,
 - * savoir exprimer les choses plutôt avec le conjugué et le module plutôt que les parties réelles et imaginaires
 - * savoir utiliser de façon judicieuse l'exponentielle complexe plutôt que d'abuser des formules de trigonométrie
 - * technique de l'angle moitié pour simplifier des expressions $e^{ia} \pm e^{ib}$,
 - * calcul de sommes de type $\sum \cos(a + nb)$,
 - * linéarisation de $\cos^k(x)$ et $\sin^k(x)$ (i.e. écrire comme CL de $\cos(\ell x)$, $\sin(\ell x)$), par Euler et binôme,
 - * inversement, délinéarisation de $\cos(nx)$ (écrire comme polynôme en \cos ou \sin), par Moivre et binôme.
 - * Manipulation des racines de l'unité, et en particulier de $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
- **Dérivation :**

- * formules usuelles de dérivation, y compris à l'ordre n , avec notamment la formule de Leibniz pour la dérivée à l'ordre n d'un produit. Dérivée de composées de 2 ou plus de fonctions.
- * Dérivées à tout ordre des fonctions usuelles (polynôme, \ln , \exp , $\frac{1}{x}$, fonctions trigonométriques et hyperboliques etc), et leurs propriétés de convexité (avec les inégalités classiques qui en découlent).
- * Définition et dérivation des réciproques, et notamment Arctan , Arcsin , Arccos .
- **Calcul asymptotique et développements limités :**
 - * règles usuelles sur les limites,
 - * croissances comparées,
 - * équivalents classiques, o , O , manipulations de ces objets (notamment négliger additivement les négligeables pour obtenir un équivalent); pièges à éviter pour les équivalents.
 - * Développements limités : il faut absolument connaître parfaitement les DL à tout ordre au voisinage de 0 (ainsi que savoir donner ces DL à un petit ordre donné sans avoir à réécrire la formule générale) de : e^x , $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ (en particulier $\frac{1}{1+x}$ et $\frac{1}{1-x}$), $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\text{sh}(x)$, $\text{ch}(x)$. Savoir retrouver rapidement $\text{Arctan}(x)$ et $\text{Arcsin}(x)$, au moins pour des ordres non indéterminés. Connaître le DL de $\tan(x)$ (et $\text{th}(x)$) jusqu'à l'ordre 3 (et même 5, ce serait mieux).
 - * techniques calculatoires sur les DL, calcul pratique (s'entraîner! c'est indispensable pour gagner en efficacité!)
- **Décompositions en éléments simples :**
 - * Savoir trouver sa forme *a priori*, dans $\mathbb{C}(X)$, dans $\mathbb{R}(X)$.
 - * Savoir mener les calculs, à l'aide des techniques et « astuces ».
- **Calcul d'intégrales et de primitives :**
 - * primitivation composée de $f'f \circ u$, changement de variable, IPP. Savoir reconnaître les situations adaptées, savoir mener des calculs concrets. Savoir exprimer des relations de récurrence entre intégrales dépendant de n .
 - * Savoir primitiver (et intégrer) des fractions rationnelles.
 - * Savoir diriger son calcul d'intégrale vers les fractions rationnelles.
- **Équations différentielles linéaires :**
 - * Savoir résoudre une EDL du premier ordre mise sous forme normale sur un intervalle : $y' = ay + b$. Notamment, savoir mettre en pratique la méthode de variation de la constante.
 - * Savoir recoller les morceaux, c'est-à-dire savoir étudier les solutions sur $]a, b[$, à partir des solutions sur $]a, c[$ et sur $]c, b[$.
 - * Savoir résoudre une EDL homogène d'ordre 2 à coefficients constants
 - * Savoir trouver une solution particulière d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants pour un second membre de la forme $P(x)e^{\lambda x}$, $P \in \mathbb{C}[X]$.
- **Suites numériques :**
 - * Savoir expliciter des suites géométriques, arithmétiques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2.
 - * Savoir étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.
- **Séries numériques :**
 - * Savoir justifier de façon efficace la convergence d'une série, en utilisant les outils adéquats selon la situation (DVG, CVA, séries alternées etc)
 - * Savoir calculer explicitement les séries télescopiques convergentes, et les séries du type $\sum P(n)\frac{x^n}{n!}$, $x \geq 1$ en se ramenant à la série exponentielle.
- **Fonctions de plusieurs variables :**
 - * Savoir calculer des dérivées partielles, un gradient, déterminer un point critique.
 - * Savoir trouver le plan tangent au graphe d'une fonction de 2 variables, en effectuant un DL à l'ordre 1.
- **Calcul matriciel :**
 - * Résolution de systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss
 - * Opérations matricielles, calculs de puissances par la formule du binôme.
 - * Calcul de l'inverse d'une matrice par méthode du pivot. Cas d'une matrice 2×2 .
 - * Calcul du rang d'une matrice par méthode du pivot.
 - * Calcul de déterminants, par opérations élémentaires, ou par développement suivant une ligne ou une colonne, ou encore par des arguments polynomiaux.
- **Algèbre linéaire :**
 - * Dans des situations concrètes, savoir déterminer si une famille est libre/génératrice

- * En dimension finie, savoir déterminer la matrice d'une AL relativement à des bases, et faire des changements de bases.
- * Savoir déterminer, directement ou matriciellement, le noyau et l'image d'applications linéaires.
- **Algèbre bilinéaire :**
 - * orthonormalisation d'une famille par le procédé de Gram-Schmidt
 - * Exprimer le projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace dont on connaît une base (pas forcément orthogonale)
 - * Exprimer la matrice d'une projection orthogonale.
- **Calculs arithmétiques :**
 - * calcul du pgcd par l'algorithme d'Euclide.
 - * calcul de coefficients de Bezout par l'algorithme d'Euclide étendu. Application à la recherche d'un inverse modulo n (i.e. étant donné k , trouver ℓ tel que $k\ell \equiv 1 [n]$).
 - * Résolution exhaustive d'une équation de Bezout $au + bv = c$, d'inconnues entières a et b .
- **Probabilités :**
 - * calculs de probabilités avec la formule des probabilités totales, composées, ou Bayes.
 - * Calculs d'espérances et de variances.

Points de cours à connaître pour l'interrogation de rentrée :

Je donne les concepts et résultats les plus importants à connaître parfaitement (venant s'ajouter aux propriétés plus calculatoires déjà données plus haut). L'étoile (*) indique les résultats dont la démonstration pourra être demandée lors de l'interrogation. La mention (DHP) indique que la démonstration est hors-programme, ou non exigible)

- **Vocabulaire ensembliste :**
 - * Avoir bien compris la différence entre élément et sous-ensemble, entre inclusion et appartenance. Ne pas avoir d'hésitation sur les notations liées aux constructions ensemblistes.
 - * Relation d'équivalence, classes d'équivalences, relation d'ordre
 - * Notion d'application injective, surjective, bijective. Images directes et réciproques.
- **Nombres réels :**
 - * Borne supérieure, propriété fondamentale de \mathbb{R} .
 - * Densité de \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} (*)
- **Suites :**
 - * Définition de la limite.
 - * Limites et inégalités (*), théorème d'encadrement (*)
 - * Théorème de la limite monotone (*)
 - * Théorème de Bozano-Weierstrass (*)
- **Continuité**
 - * Définitions d'une limite, critère séquentiel (*), définition de la continuité.
 - * Règles usuelles, inégalités, encadrement
 - * TVI (*), théorème de la borne atteinte (*), théorème de la limite monotone pour les fonctions.
 - * Théorème de la bijection (DHP).
 - * Continuité uniforme, théorème de Heine (DHP).
- **Dérivabilité**
 - * Définitions, fonctions de classe \mathcal{C}^k , \mathcal{D}^k (k fois dérivables)
 - * caractérisation par DL à l'ordre 1 (*)
 - * CN pour un extremum local (*)
 - * théorème de Rolle (*), théorème des accroissements finis (*)
 - * Théorème de la limite de la dérivée (*)
 - * Convexité, inégalité de Jensen
 - * caractérisations des fonctions convexes \mathcal{D}^1 et \mathcal{D}^2 .
- **Séries, familles sommables**
 - * Les théorèmes de comparaison (TCSTP pour \leq, o, O, \sim) (* pour tous)
 - * CVA implique CV (*)
 - * Théorème des séries alternées (*).
 - * Notion de famille sommable
 - * Théorème de Fubini et d'associativité, cas positif (DHP)

- **Structures algébriques**
 - * Notion de groupe, sous-groupe, morphisme de groupe
 - * Images directes et réciproques de sous-groupes par un morphisme (*).
 - * Noyau d'un morphisme, caractérisation de l'injectivité (*)
 - * Anneaux, corps (définitions)
 - * Groupe symétrique. Signature. Décomposition en cycles.
- **Arithmétique**
 - * Nombres premiers,
 - * Lemme de Gauss, lemme d'Euclide
 - * pgcd, ppcm, nombres premiers entre eux, Bézout
 - * Existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers (*).
- **Polynômes**
 - * Racines, multiplicité ;
 - * caractérisation de la multiplicité par les dérivées (*)
 - * majoration du nombre de racine et rigidité (*)
 - * PGCD, PPCM, Bézout.
 - * Théorème de D'Alembert (DHP), description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$
 - * Description des irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
- **Algèbre linéaire**
 - * Définitions, familles libres/génératrices, bases, coordonnées.
 - * Somme, somme directe.
 - * Théorème de la base extraite.
 - * Définition de la dimension.
 - * Dimension d'une somme directe (*), d'une somme quelconque (*).
 - * Applications linéaires, noyau, image. Endomorphismes.
 - * Détermination d'une AL par l'image d'une base (*), par ses restrictions sur les termes d'une somme directe.
 - * Projecteurs. Équivalence entre le point de vue géométrique et $p^2 = p$ (*)
 - * Théorème du rang (*), y compris sa forme géométrique (*) (isomorphisme en un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$).
 - * Matrice d'une AL dans des bases. Matrice d'un endomorphisme.
 - * Matrice de passage. Formule de changement de base (*).
 - * Matrice $J_{n,p,r}$; toute matrice est équivalente à une et une seule de ces matrices. Caractérisation des matrices équivalentes par leur rang
 - * Trace, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ (*), invariance de la trace par changement de base sur un endomorphisme (*). Trace d'un endomorphisme.
- **Algèbre bilinéaire**
 - * Produit scalaire, Inégalité de Cauchy-Schwarz (*), norme euclidienne associée
 - * Orthogonalité, Pythagore (*)
 - * b.o.n.. Existence d'une b.o.n. en dimension finie
- **Probabilités**
 - * Langage probabiliste, distribution de probabilités, système complet d'événements
 - * Manipulations sur les probas (union disjointe, complémentaire, différence),
 - * Probabilités conditionnelles, formule des probabilités totales (*), formule des probabilités composées (*). Indépendance
 - * Variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire.
 - * Loi conjointe, lois marginales du couple (X, Y) . Indépendance de deux variables.
 - * Espérance et variance. Formule de König-Huyghens (*).
 - * Covariance, expression avec $\mathbb{E}(XY)$. Variance d'une somme (*).
 - * Inégalité de Markov (*), Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (*).
 - * Lois classiques (uniforme, Bernoulli, binomiale), espérance et variance (à connaître par coeur, et à savoir recalculer (*)).