

DM n° 1 : Révisions sur les suites numériques MPSI

Corrigé de l'exercice 1 –

1. Quelques propriétés générales

(a) On effectue une récurrence d'ordre 2.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in I$.

Par hypothèse, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiés.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vérifiés. Alors, $u_n \in I$, et comme I est stable par f , $f(u_n) \in I$. Par ailleurs, $u_{n+1} \in I$, donc I étant un intervalle (donc convexe), tout réel compris entre $f(u_n)$ et u_{n+1} est dans I , en particulier le milieu :

$$\frac{u_{n+1} + f(u_n)}{2} \in I.$$

On utilise encore un fois la stabilité de I par f pour obtenir :

$$u_{n+2} = f\left(\frac{u_{n+1} + f(u_n)}{2}\right) \in I.$$

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ entraînent $\mathcal{P}(n+2)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Conclusion : $\boxed{\text{si } u_0, u_1 \in I, \text{ alors : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I}$

(b) Constatons dans un premier temps que d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. Pour montrer la décroissance, on effectue à nouveau une récurrence d'ordre 2.

Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{Q}(n)$: $u_n \geq u_{n+1}$.

Les propriétés $\mathcal{Q}(0)$ et $\mathcal{Q}(1)$ découlent de l'hypothèse $u_0 \geq u_1 \geq u_2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que les propriétés $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ sont vraies. Alors, d'après $\mathcal{Q}(n)$, $u_{n+1} \geq u_n$. Ces termes étant dans I et f étant croissante sur I , on en déduit $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$. En utilisant $\mathcal{Q}(n+1)$, et vient alors

$$u_{n+2} + f(u_{n+1}) \geq u_{n+1} + f(u_n) \quad \text{puis:} \quad \frac{u_{n+2} + f(u_{n+1})}{2} \geq \frac{u_{n+1} + f(u_n)}{2}.$$

Par convexité de I , comme dans la question 1, $\frac{u_{n+2} + f(u_{n+1})}{2}$ et $\frac{u_{n+1} + f(u_n)}{2}$ sont dans I , donc on peut à nouveau utiliser la croissance de f sur I pour obtenir :

$$f\left(\frac{u_{n+2} + f(u_{n+1})}{2}\right) \geq f\left(\frac{u_{n+1} + f(u_n)}{2}\right) \quad \text{soit:} \quad u_{n+3} \geq u_{n+2}$$

Ainsi, $\mathcal{Q}(n+3)$ est également vérifié.

Par conséquent, $\mathcal{Q}(0)$ et $\mathcal{Q}(1)$ sont vraies, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(n)$ et $\mathcal{Q}(n+1)$ entraînent $\mathcal{Q}(n+2)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Conclusion : $\boxed{\text{Si } u_0, u_1, u_2 \in I \text{ vérifient } u_0 \geq u_1 \geq u_2 \text{ et si } f \text{ est croissante sur } I \text{ alors } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

(c) Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{R}(n)$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

L'hypothèse $u_1 = f(u_0)$ équivaut à la propriété $\mathcal{R}(0)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{R}(n)$ soit vraie. On a alors

$$u_{n+2} = f\left(\frac{u_{n+1} + f(u_n)}{2}\right) = f\left(\frac{u_{n+1} + u_{n+1}}{2}\right),$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi $u_{n+2} = f(u_{n+1})$, d'où $\mathcal{R}(n+1)$.

Par conséquent, $\mathcal{R}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{R}(n)$ entraîne $\mathcal{R}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Conclusion : $\boxed{\text{Si } u_1 = f(u_0), \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).}$

Montrer que si $u_1 = f(u_0)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. L'algorithme à mettre en place est l'algorithme usuel pour les récurrences d'ordre 2 (voir le calcul de la suite de Fibonacci).

```

from math import sin
def calcul(a,b,n):
    if n=0:                % initialisation
        return a
    else:                  % valable aussi pour n=1
        for k in range(2,n+1):
            a, b = b, sin(b / 2 + sin(a) / 4) / 2
        return b

```

- (a) $\sin$ est positive sur $[0, 1] \subset [0, \pi]$, donc $\sin([0, 1]) \subset [0, 1]$. On en déduit que $[0, 1]$ est stable par f .
- (b) Pour tout x de $[0, 1] = I$, on a $\sin(x) \leq x$. Or, d'après 1 et les hypothèses sur u_0 et u_1 , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \frac{u_{n+1} + \frac{1}{2} \sin(u_n)}{2} \leq \frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{4} \leq \frac{3}{4} \leq 1.$$

La fonction $\sin$ étant croissante sur $[0, 1]$, il vient :

$$0 \leq \frac{1}{2} \sin \left(\frac{u_{n+1} + \frac{1}{2} \sin(u_n)}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \sin \left(\frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{4} \right),$$

et on applique une nouvelle fois l'inégalité $\sin(x) \leq x$ pour $x \geq 0$, sur le terme de droite de cette inégalité :

$$0 \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{u_{n+1}}{2} + \frac{u_n}{4} \right).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \leq \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n$.

- (c) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = u_0$, $v_1 = u_1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \frac{1}{4}v_{n+1} + \frac{1}{8}v_n$. Une récurrence (double) immédiate amène $0 \leq u_n \leq v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, (v_n) est une suite récurrente double dont le polynôme caractéristique est $X^2 - \frac{1}{4}X - \frac{1}{8}$ de racines $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. Ainsi, il existe deux réels α et β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq \alpha \left(-\frac{1}{4} \right)^n + \beta \left(\frac{1}{2} \right)^n,$$

et par le théorème d'encadrement, on obtient alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3. Étude d'un cas particulier.

On suppose toujours que $f = \frac{1}{2} \sin$, et on suppose de plus que $u_0 = \frac{\pi}{6}$ et $u_1 = \frac{1}{4}$.

- (a) On a ici, $u_1 = f(u_0)$, et $u_0, u_1 \in I$, I étant un intervalle stable par f .

Ainsi d'après 1(c), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2} \sin(u_n)$.

- (b) Le fait que $\lim u_n = 0$ provient de l'étude générale faite en 2(d).

Par ailleurs, $u_2 = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ donc $u_0 \geq u_1 \geq u_2$, et tous trois sont dans $I = [0, 1]$, stable par f . Ainsi, d'après 1(b), (u_n) est décroissante.

On pouvait bien sûr s'en sortir de façon directe ici, en se servant du fait qu'on s'est ramené à une récurrence d'ordre 1 avec une fonction croissante sur un certain intervalle stable : on dispose d'une méthode systématique dans ce cas.

- (c) La fonction $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f également, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cos x.$$

En particulier, f' est continue sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = \frac{1}{2}$. Soit $a \in [0, \frac{1}{2}]$, et $\varepsilon = \frac{1}{2} - a > 0$. Par définition de la continuité de f' en 0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\delta, \delta[$ (donc en particulier pour tout $x \in [0, \delta[$, on ait :

$$|f'(x) - f'(0)| < \varepsilon \quad \text{soit:} \quad a = \frac{1}{2} - \varepsilon \leq f'(x) \leq \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $a \in [0, \frac{1}{2}[$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0, \delta[, \quad f'(x) \geq a.$$

La suite (u_n) tendant vers 0, donc il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in]-\delta, \delta[$. Comme de plus, (u_n) est à valeurs dans $I = [0, 1]$, on a :

$$\forall n \geq N, \quad u_n \in [0, \delta[.$$

Soit $n \geq N$. On a alors $u_n \in [0, \delta[$, donc $|f'| \geq a$ sur $[0, u_n]$. D'après l'inégalité des accroissements finis entre 0 et u_n , f étant dérivable sur $]0, \delta[$ et continue sur $[0, \delta]$, on en déduit que

$$|f(u_n) - f(0)| \geq a|u_n - 0|, \quad \text{donc:} \quad u_{n+1} \geq au_n.$$

En itérant cette inégalité à partir du rang N , il vient :

$$\forall n \geq N, \quad \boxed{u_n \geq a^{n-N} u_N}.$$

Corrigé de l'exercice 2 –

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n + 4}{u_n - 1}$.

1. Étude de l'existence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- (a)
 - f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - L'équation $f(x) = 2$ équivaut à $2x + 4 = 2x - 2$, donc $4 = -2$, ce qui n'est pas possible. Donc 2 n'est pas dans l'image de f
 - Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. L'équation $f(x) = y$ équivaut à $2x + 4 = xy - y$, donc à $x(y - 2) = y + 4$, donc, puisque $y \neq 2$, à $x = \frac{y+4}{y-2}$.

Ainsi, y a un et un seul antécédent par f

On en déduit que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et que sa réciproque est donnée, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, par :

$$\boxed{g(y) = f^{-1}(y) = \frac{y + 4}{y - 2}}.$$

- (b) La fonction f étant définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, le seul cas de figure dans lequel (u_n) n'est pas défini est celui où, lors de la construction de (u_n) , une valeur donnée prend la valeur 1, empêchant ainsi de continuer à appliquer f . Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas définie si et seulement s'il existe n tel que $u_n = 1$, c'est-à-dire $f \circ \dots \circ f(u_0) = 1$, c'est-à-dire $f \circ \dots \circ f(a) = 1$, le nombre de termes dans cette composition étant n .

Cette condition équivaut à $a = f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}(1) = v_n$, par définition de (v_n) .

Ainsi, (u_n) n'est pas bien définie si et seulement s'il existe n tel que $v_n = a$.

Par conséquent, (u_n) est bien définie ssi $a \notin \{v_n, n \in \mathbb{N}\}$.

- (c) • La fonction g étant un quotient de deux fonctions polynomiales, elle est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad g'(x) = \frac{(y-2) - (y-4)}{(y-2)^2} = -\frac{6}{(y-2)^2} < 0$$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$-$
$g(x)$	$1 \searrow$ $-\infty$		$+\infty \searrow$ 1

- D'après ces variations, $g(]-\infty, 2]) =]-\infty, 1[\cup]-\infty, 2[$, donc l'intervalle $] - \infty, 2[$ est stable par g . Cela prouve au passage que (v_n) est bien définie, puisque $v_0 = 1 \in] - \infty, 2[$: tous ses termes sont alors aussi dans $] - \infty, 2[$.
- Par ailleurs, la décroissance de g sur l'intervalle stable $] - \infty, 2]$ implique la croissance de $g \circ g$. Or, $v_0 = 1, v_1 = -5, v_2 = \frac{1}{7}$, donc $v_0 > v_2$. Par croissance de $g \circ g$ sur $] - \infty, 2[$, on obtient $g \circ g(v_0) > g \circ g(v_2)$, donc $v_2 > v_4$. Par une récurrence immédiate, cette inégalité se propage aux rangs suivants, et on obtient la décroissance de $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$.

- En appliquant g strictement décroissante à l'inégalité $v_{2n} > v_{2n+1}$, on obtient $v_{2n+1} < v_{2n+3}$. cela étant valide pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $(v_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- (d) • On a, pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ tel que $g(y) \neq 2$,

$$g \circ g(y) = \frac{\frac{y+4}{y-2} + 4}{\frac{y+4}{y-2} - 2} = \frac{5y-4}{-y+8}.$$

Ainsi, y est un point fixe de $g \circ g$ si et seulement si $\frac{5y-4}{-y+8} = y$, c'est-à-dire $y^2 - 3y - 4 = 0$. Ainsi, les points fixes de $g \circ g$ sont -1 et 4 .

- La suite (v_{2n+1}) est croissante, et majorée par 2 . Elle est donc convergente. Elle converge donc vers un point fixe de $g \circ g$ (car cette fonction est continue) ou un bord du domaine. Comme (v_{2n+1}) est à valeurs dans $] -\infty, 2[$, le seul point fixe possible est -1 , et le seul bord possible est 2^- .
- Si $v_{-2n+1} \rightarrow 2^-$, en composant par f , $v_{2n+2} \rightarrow -\infty$, puis $v_{2n+3} \rightarrow 1$, ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi, cette situation est impossible.
- On en déduit que $\lim v_{2n+1} = -1$.
- En appliquant g continue, on a donc $\lim v_{2n+2} = g(-1) = -1$.
- On peut donc conclure que (v_n) est convergente, et $\lim v_n = -1$.

2. Convergence de (u_n)

On suppose dans toute cette question que $a \notin \{v_k, k \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, la suite (u_n) est bien définie.

- (a) • Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel x vérifie l'équation $f(x) = x$ si et seulement si $g \circ f(x) = g(x)$ (car g est bijective), donc si et seulement si $x = g(x)$. Ainsi, f et g ont les mêmes points fixes, donc les points fixes de g sont -1 et 4 .
- De même, les points fixes de $f \circ f$ sont les points fixes de $g \circ g$, à savoir -1 et 4 également.
- (b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, en tant que fraction rationnelle, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f'(x) = -\frac{6}{(x-1)^2} < 0.$$

Ainsi, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$2 \searrow$ $-\infty$		$+\infty \searrow$ 2

Ces variations indiquent que $f(]1, +\infty[) \subset]2, +\infty[\subset]1, +\infty[$, donc $]1, +\infty[$ est un intervalle stable par f .

- (c) Supposons $a \in]1, +\infty[$.
- L'argument utilisé pour l'étude de la suite (v_n) s'adapte : f étant décroissante sur l'intervalle stable $]1, +\infty[$ contenant u_0 , les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de variation opposé.
 - L'une des deux est alors décroissante et minorée disons (u_{2n}) pour se fixer les idées (l'autre cas est similaire), donc converge, vers l'unique point fixe de $f \circ f$ possible (à savoir 4), ou vers le bord 1 .
 - La convergence vers le bord n'est pas possible, car en appliquant 2 fois f à u_{2n} , on devrait avoir $u_{2n+2} \rightarrow 2$. Donc $\lim u_{2n} = 4$.
 - Comme 4 est un point fixe de f , qui est continue en ce point, on a aussi $\lim u_{2n+1} = 4$, donc $\lim u_n = 4$.
- (d) Supposons $a \in]-\infty, -5[$. On a $f(-5) = 1$, donc, f étant strictement décroissante sur $] -\infty, -5[$, $f(a) > 1$, donc $u_1 > 1$, et on est ramené à l'étude précédente. Ainsi, $\lim u_n = 4$.
- (e) Supposons $a \in]\frac{1}{7}, 1[$. De même, $f(\frac{1}{7}) = -5$, et f est strictement décroissante sur $] \frac{1}{7}, 1[$, donc $f(a) < -5$, donc $u_1 \in]-\infty, -5[$ et on est ramené à l'étude de la question précédente (on aura alors $u_2 \in]1, +\infty[$)
- Par conséquent, dans ce cas aussi, $\lim u_n = 4$.
- (f) Supposons $a \in]-5, \frac{1}{7}[$, $a \neq -1$, et supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-5, \frac{1}{7}[$.
- On a, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$f \circ f(x) - x = \frac{8x+4}{x+5} - x = \frac{-x^2+3x+4}{x+5} = \frac{-(x+1)(x-4)}{x+5}.$$

Ainsi, $f \circ f(x) - x$ est négatif sur $] -5, -1[$ et positif sur $] -1, \frac{1}{7}[$.

- Par ailleurs, $f \circ f$ est strictement croissante sur $] -5, \frac{1}{7}[$ et -1 est un point fixe de $f \circ f$. Donc pour tout n tel que $u_n \in] -5, -1[$, $f(u_{2n}) < f(-1) = -1$, donc $u_{2n+2} < -1$. L'hypothèse faite sur (u_n) permet d'affirmer que $u_{2n+2} \in] -5, -1[$.
- On suppose $a \in] -5, -1[$. Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in] -5, -1[$. Le signe de $f \circ f(x) - x$ sur cet intervalle amène alors la décroissance de (u_{2n}) . Comme elle est bornée, elle est convergente vers un réel $\ell \in] -5, -1[$. Ce réel n'est ni un point fixe de $f \circ f$ ni un bord de son domaine de définition, d'où une contradiction.
- On raisonne de même si $a \in] -1, \frac{1}{7}[$: sous les hypothèses données, (u_{2n}) serait alors croissante et majorée, mais il n'y a ni point fixe, ni bord de domaine vers lequel converger !
- Ainsi, on en déduit que notre hypothèse initiale est fausse, et que si $a \in] -5, \frac{1}{7}[\setminus \{-1\}$, il existe n_0 tel que $u_{n_0} \notin] -5, \frac{1}{7}[$. On a montré qu'alors $\boxed{\lim u_n = 4}$.

(g) Nous avons donc montré que

- pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ différent de -1 , (u_n) est bien défini et converge vers 4.
- si $a = -1$, comme il s'agit d'un point fixe de f , (u_n) est constante égale à -1 , donc converge vers -1 .
- si $a \in \{v_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors (u_n) n'est pas définie pour les grandes valeurs de n .

3. Étude de la vitesse de convergence de (u_n) On suppose $a > 1$ et $a \neq 4$.

- (a) • L'intervalle $]1, +\infty[$ étant stable par f , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. De plus, par bijectivité, 4 n'a qu'un antécédent par f qui est lui-même. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 4$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intervalle $[u_k, 4]$ (ou $[4, u_k]$ suivant leur ordre respectif) est entièrement compris dans le domaine de définition de f . Comme f est dérivable sur son domaine de définition, on peut utiliser le théorème des accroissements finis sur $[4, u_k]$:

$$\exists c_k \in]4, u_k[, \quad f(u_k) - f(4) = f'(c_k)(u_k - 4) \quad \text{soit:} \quad u_{k+1} - 4 = f'(c_k)(u_k - 4)$$

En itérant cette relation en cascade, il vient, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n - 4 = (u_0 - 4) \prod_{k=1}^n f'(c_k)}.$$

- Comme (u_n) tend vers 4 et $c_n \in [4, u_n]$, le théorème d'encadrement permet de conclure que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 4}$.
- (b) • On a $f'(4) = -\frac{2}{3}$, et f' est continue en $-\frac{2}{3}$. Donc $|f'(c_n)| \rightarrow \frac{2}{3}$, et par continuité du $\ln$, $\ln |f'(c_n)| \rightarrow \ln \left(\frac{2}{3}\right)$.
- Par conséquent, d'après le théorème de Cesàro,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(c_k)| = \ln \left(\frac{2}{3}\right)}$$

(c) On a donc :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(c_k)| = \ln \left(\frac{2}{3}\right) + o(1) \quad \text{donc:} \quad \sum_{k=1}^n \ln |f'(c_k)| = n \ln \left(\frac{2}{3}\right) + o(n).$$

Il existe donc une suite (x_n) , vérifiant $x_n = o(n)$, telle que

$$\sum_{k=1}^n \ln |f'(c_k)| = n \ln \left(\frac{2}{3}\right) + x_n,$$

et donc, en appliquant l'exponentielle :

$$\prod_{k=1}^n |f'(c_k)| = e^{n \ln \left(\frac{2}{3}\right) + x_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{x_n}.$$

On déduit alors de la question 3(a) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 4| = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{x_n} |u_0 - 4|.$$

Puisqu'on a supposé $a \neq 4$, $u_0 - 4 \neq 0$, et on peut donc poser $w_n = x_n + \ln |a - 4| = o(n)$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{|u_n - 4| = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{w_n}}.$$

(d) Si $r = 0$, le résultat est trivial.

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\frac{|u_n - 4|}{r^n} = e^{n(\ln \frac{2}{3} - \ln r) + w_n}.$$

- Si $r > \frac{2}{3}$, alors $\ln \frac{2}{3} - \ln r < 0$, et puisque $w_n = o(n)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\ln \frac{2}{3} - \ln r \right) + w_n = -\infty \quad \text{donc:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_n - 4|}{r^n} = 0.$$

Ainsi, $|u_n - 4| = o(r^n)$

- Si $r < \frac{2}{3}$, alors $\ln \frac{2}{3} - \ln r > 0$, et puisque $w_n = o(n)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\ln \frac{2}{3} - \ln r \right) + w_n = +\infty \quad \text{donc:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_n - 4|}{r^n} = +\infty.$$

Ainsi, $r^n = o(|u_n - 4|)$.

Corrigé du problème –

1. On montre par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq \sqrt{n}$.

- Puisque $u_0 \geq 0$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $u_n \geq \sqrt{n}$. Alors, $n + u_n \geq n \geq 0$, donc la racine est définie et u_{n+1} existe.
- De plus,

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1 + u_n} \geq \sqrt{n+1}.$$

- D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout entier } n, u_n \geq \sqrt{n}}.$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a

$$\frac{1}{2}(1+x) - \sqrt{x} = \frac{1}{2}(1 - 2\sqrt{x} + x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{x})^2 \geq 0.$$

Donc $\boxed{\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x)}$

3. • On peut procéder par récurrence, ou alors contourner cette récurrence par un petit télescope, en remarquant que la question précédente permet d'obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2u_n - u_{n-1} \leq n, \quad \text{soit:} \quad 2^n u_n - 2^{n-1} u_{n-1} \leq 2^{n-1} n.$$

Ainsi, par télescope,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2^n u_n - u_0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^k (k+1) \leq n \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = n(2^n - 1) \leq n2^n.$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout entier } n, u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}}$

- En particulier, en réinjectant cette inégalité dans la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq \sqrt{2n - 1 + \frac{u_0}{2^{n-1}}} = o(n).$$

Ainsi, $\boxed{u_n = o(n)}$.

4. On a alors aussi $u_{n-1} = o(n)$, donc $n + u_{n-1} \underset{+\infty}{\sim} n$, puis $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}}$.

5. On repart de la relation initiale :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n + u_{n-1}} \\ &= \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} \\ &\underset{+\infty}{=} \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{u_{n-1}}{n} + o\left(\frac{u_{n-1}}{n}\right) \right) \\ &\underset{+\infty}{=} \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right), \end{aligned}$$

d'après l'équivalent trouvé dans la question précédente. Ainsi

$$u_n \underset{+\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1).$$

6. • On réinjecte ce résultat dans la relation de récurrence, pour améliorer la précision de notre développement :

$$\begin{aligned} u_n &\underset{+\infty}{=} \sqrt{n + \sqrt{n-1} + \frac{1}{2} + o(1)} \\ &= \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &\underset{+\infty}{=} \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right]. \end{aligned}$$

- On recommence :

$$\begin{aligned} u_n &\underset{+\infty}{=} \sqrt{n + \sqrt{n-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n-1}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \\ &\underset{+\infty}{=} \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} \\ &\underset{+\infty}{=} \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)} \\ &\underset{+\infty}{=} \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{3}{8n\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

7. • On exprime un développement asymptotique de $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &\underset{+\infty}{=} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) + \frac{1}{8\sqrt{n}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Par propriété de conservation du signe, on en déduit que (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

- On fait de même pour $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} - \frac{u_n}{\sqrt{n}} &\underset{+\infty}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right) + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{n}} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) + \frac{1}{8n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} - 1 \right) + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\ &\underset{+\infty}{=} -\frac{1}{4n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n\sqrt{n}} \end{aligned}$$

On en déduit, par propriété de conservation du signe, que $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante à pcr.

8. (a) On a $u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$.

Ainsi, les termes généraux étant positifs, la série de terme général u_n^α est de même nature de la série de terme général $n^{\frac{\alpha}{2}}$, qui est une série de Riemann de paramètre $\frac{\alpha}{2}$.

Donc $\sum u_n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha < -2$.

- (b) • D'après la question précédente, si $\alpha < -2$, $\sum (-1)^n u_n^\alpha$ converge absolument.
- Si $\alpha \geq 0$, u_n^α ne tend pas vers 0, donc $\sum (-1)^n u_n^\alpha$ diverge grossièrement.
- Soit $-2 \leq \alpha < 0$. La suite $(u_n)^\alpha$ est positive, et décroissante à pcr, d'après la question 7. De plus, $\lim u_n^\alpha = 0$. Ainsi, $\sum (-1)^n u_n^\alpha$ est une série alternée à pcr, donc convergente, mais pas absolument.

Partie I – Équivalent d'une série

On pose, lorsque la série converge, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k$, et $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{k} x^k$.

1. • Lorsque $|x| \geq 1$, la série est grossièrement divergente, par croissances comparées.
- Si $|x| < 1$,

$$|x^n u_n| \underset{+\infty}{\sim} |x|^n \sqrt{n} = o(y^n),$$

où $y \in]|x|, 1[$. Ainsi, par TCSTP, $\sum u_n x^n$ converge absolument.

Ainsi, le domaine de f est $] -1, 1[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in]0, 1[$,

$$u_n x^n \geq \sqrt{n} x^n \geq x^n.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$f(x) \geq u_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} x^k = u_0 + \frac{x}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty.$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

3. Soit (a_n) et (b_n) deux suites positives telles que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$. On suppose que $A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ est définie (au moins) sur $] -1, 1[$ et que $A(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$.

- (a) La convergence (absolue) de B en 0 est évidente. Puisque (b_n) est positive, on a l'équivalent suivant, pour $x \neq 0$:

$$|b_n x^n| \underset{+\infty}{\sim} a_n |x|^n.$$

Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs (par équivalences), $\sum b_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in] -1, 1[$. On en déduit que B est définie (au moins) sur $] -1, 1[$.

- (b) Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de l'équivalence, on dispose de n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$|a_n - b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} a_n.$$

Cette propriété traduit en effet le fait que $b_n = a_n + o(a_n)$. On en déduit que pour $x \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geq n_0} a_n x^n - \sum_{n \geq n_0} b_n x^n \right| &\leq \sum_{n \geq n_0} |a_n - b_n| x^n \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n \geq n_0} a_n x^n \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{\varepsilon}{2} A(x), \end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant du fait que tous les termes de la série sont positifs.

(c) On en déduit que pour tout $x \in]0, 1[$

$$|A(x) - B(x)| \leq |P(x)| + \frac{\varepsilon}{2} A(x),$$

où P est la fonction polynomiale définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n_0} (a_k - b_k) x^k.$$

Puisque P est polynomiale, elle est continue en 1, donc y admet une limite finie. Puisque $A(x) \xrightarrow{1^-} +\infty$, $P(x) = o(A(x))$, de quoi on déduit l'existence de $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]1 - \eta, 1[$, on ait

$$|P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} A(x).$$

On en déduit finalement que pour tout $x \in]1 - \eta, 1[$,

$$|A(x) - B(x)| \leq \varepsilon A(x).$$

Ainsi, $\boxed{A(x) \underset{1^-}{\sim} B(x)}$.

4. (a) La série définissant g étant absolument convergente sur $] - 1, 1[$ (par le même argument que pour f), la famille $(\sqrt{n}x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable pour tout $x \in]0, 1[$. On peut donc effectuer un produit de Cauchy :

$$g(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x),$$

où

$$c_n(x) = \sum_{k=0}^n \sqrt{k(n-k)} x^k x^{n-k} = nx^n \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}.$$

On remarque que cette quantité est nulle pour $n = 0$ et $n = 1$. Ainsi, pour tout $x \in] - 1, 1[$,

$$\boxed{g(x)^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} n \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)} x^n}.$$

- (b) D'après le théorème des sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)} \rightarrow \boxed{\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} \, dx = \alpha} > 0,$$

de quoi on déduit que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \alpha n.$$

On obtient donc

$$n \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \alpha n^2 \underset{+\infty}{\sim} \alpha(n+1)(n+2).$$

De plus, d'après la formule du binôme négatif,

$$\sum_{n \geq 0} \alpha(n+1)(n+1)x^n = \frac{2\alpha}{(1-x)^3} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty.$$

Ainsi, tous les coefficients étant positifs, la question 3 amène

$$\boxed{g(x)^2 \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n \geq 0} \alpha(n+1)(n+1)x^n}.$$

Le fait d'avoir rajouté 2 termes dans la somme de droite n'est pas gênant, l'équivalence entre les termes généraux restant vraie en prolongeant les coefficients de g^2 aux rangs 0 et 1 en les posant nuls.

- (c) • On en déduit que $g(x) \underset{1-}{\sim} \frac{\sqrt{2\alpha}}{(1-x)^{-\frac{3}{2}}}$, puis, en appliquant de nouveau la question 3 (avec l'hypothèse fournie par la question 2),

$$\boxed{f(x) \underset{1-}{\sim} g(x) \underset{1-}{\sim} \frac{\beta}{(1-x)^{\frac{3}{2}}},}$$

où $\beta = \sqrt{2\alpha}$.

- On doit donc calculer l'intégrale

$$\alpha = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(t)(1-\sin^2(t))} 2 \cos(t) \sin(t) \, dt,$$

par le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$, $x = \sin^2(t)$. On en déduit que

$$\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2(t) \sin^2(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2t) \, dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(4t)) \, dt.$$

On trouve finalement $\alpha = \frac{\pi}{8}$, donc $\boxed{\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

- On pouvait aussi calculer l'intégrale en se ramenant après mise sous forme canonique et cdv linéaire à $\int \sqrt{1-y^2}$, qu'on calcule par IPP, pour se ramener à la dérivée de Arcsin.
- Une troisième méthode, plus géométrique, consiste à interpréter cette intégrale comme l'aire d'un demi-disque de diamètre $[0, 1]$.

Partie II – Développement asymptotique de $f(x)$

1. Soit n pair. On pose $n = 2m$. On pose $h : x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$.

- (a) • La fonction h est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, donc

$$\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], \quad h\left(\frac{k}{n}\right) \leq h(x) \leq h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

En intégrant, il vient

$$\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \quad \frac{1}{n} \cdot h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(x) \, dx \leq \frac{1}{n} \cdot h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

En sommant, on obtient

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^{\frac{1}{2}} h(x) \, dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

d'où par changement d'indice, par la relation de Chasles, et du fait que $h(0) = 0$,

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^{\frac{1}{2}} h(x) \, dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m h\left(\frac{k}{n}\right)}$$

- On fait à peu près la même chose sur $[\frac{1}{2}, 1]$, intervalle sur lequel h est décroissante :

$$\forall k \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket, \forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], \quad h\left(\frac{k}{n}\right) \geq h(x) \geq h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

En intégrant, il vient

$$\forall k \in \llbracket m, 2m-1 \rrbracket, \quad \frac{1}{n} \cdot h\left(\frac{k}{n}\right) \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(x) \, dx \geq \frac{1}{n} \cdot h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

En sommant, on obtient

$$\frac{1}{n} \sum_{k=m}^{2m-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \geq \int_{\frac{1}{2}}^1 h(x) \, dx \geq \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{2m-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

d'où par changement d'indice, par la relation de Chasles, et du fait que $h(1) = 0$,

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{2}}^0 h(x) \, dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=m}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

- (b) En sommant les deux encadrements pour regrouper les intégrales, et en arrangeant un peu les choses, il vient :

$$-\frac{1}{n} \cdot h\left(\frac{m}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m h\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 h(t) \, dt \leq \frac{1}{n} \cdot h\left(\frac{m}{n}\right),$$

donc, h étant majorée (car continue sur un segment),

$$\boxed{\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m h\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 h(t) \, dt \right| \leq \frac{1}{n} \sup_{x \in [0,1]} h(x)}.$$

2. On suppose n impair, et on pose $n = 2m + 1$.

- (a) Il faut refaire à peu près la même chose qu'avant. On rédige plus vite, les arguments étant les mêmes.

- Pour tout $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, $[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}] \subset [0, \frac{1}{2}]$, donc f est croissante sur cet intervalle, et

$$\frac{1}{n} \cdot h\left(\frac{k}{m}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(x) \, dx \leq \frac{1}{n} \cdot h\left(\frac{k+1}{m}\right),$$

d'où, en sommant, changeant d'indice etc :

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^{\frac{m}{n}} h(x) \, dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m h\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

- De même, pour tout $k \in \llbracket m+1, n-1 \rrbracket$, $[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}] \subset [\frac{1}{2}, 1]$, donc f est décroissante sur cet intervalle, et

$$\frac{1}{n} \cdot h\left(\frac{k}{m}\right) \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} h(x) \, dx \geq \frac{1}{n} \cdot h\left(\frac{k+1}{m}\right),$$

d'où, en sommant, changeant d'indice etc :

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^{\frac{m}{n}} h(x) \, dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

- (b) La aussi je rédige un peu plus vite. En sommant, il manque comme tout à l'heure certains termes, ou il y en a en trop : les termes d'indices m et $m+1$ à gauche, et la tranche $[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$ de l'intégrale. La valeur absolue de la différence entre la somme totale et l'intégrale totale est donc majorée par la somme de ces 3 termes, chacun d'eux étant majoré par $\frac{s}{n}$, où $s = \sup_{x \in [0,1]} h(x)$. On en déduit que

$$\boxed{\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^m h\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 h(t) \, dt \right| \leq \frac{3}{n} \sup_{x \in [0,1]} h(x)}.$$

3. Avec la même notation que ci-dessus, on peut combiner les résultats des deux questions précédentes, pour obtenir, indépendamment de la parité de n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 h(t) \, dt \right| \leq \frac{3s}{n}.$$

Ainsi, par définition de la domination,

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 h(t) \, dt + O\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

On admet que sous les hypothèses de la question II-3, si on remplace $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ par $b_n = O(a_n)$, alors $B(x) \underset{-1}{=} O(A(x))$. La preuve est similaire à celle qu'on a donnée pour l'équivalence.

4. En notant $\alpha = \int_0^1 h(x) \, dx$ comme dans la partie II, on obtient donc

$$g(x)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

où

$$b_n = \alpha n^2 + O(n) = \alpha(n+1)(n+2) + O(n).$$

Ainsi,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad g(x)^2 = \frac{2\alpha}{(1-x)^3} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n,$$

où $c_n = O(n+1)$. Or,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty.$$

Ainsi, d'après le résultat admis,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \underset{1^-}{=} O\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right),$$

puis

$$g(x)^2 \underset{1^-}{=} \frac{2\alpha}{(1-x)^3} + O\left(\frac{1}{(1-x)^2}x\right).$$

En passant à la racine, il vient

$$\begin{aligned} g(x) &\underset{0}{=} \frac{\beta}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} \left(\sqrt{1 + O(1-x)} \right) \\ &\underset{0}{=} \frac{\beta}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} (1 + O(1-x)) \\ &\underset{0}{=} \boxed{\frac{\beta}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right)}. \end{aligned}$$

Montrer que $g(x) = \frac{b}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right)$.

5. On rappelle que $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + v_n$, où $v_n = o(1)$. Or,

- $\sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{k} x^k = \frac{\beta}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right);$
- $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot x^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x}.$
- Enfin,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty,$$

et $v_n = o(1)$. Donc

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n| x^n \underset{1^-}{=} o\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

d'après le résultat admis.

- Ainsi, on en déduit finalement que

$$\boxed{f(x) \underset{1^-}{=} \frac{\beta}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x} + o\left(\frac{1}{1-x}\right)}.$$

NB : La formule du binôme négatif peut être démontrée à l'aide de produits de Cauchy itérés (en faisant des produits de séries géométriques), ou bien à l'aide de formules de Taylor, en étudiant la convergence du reste intégrale, ou bien encore par des arguments de dérivation de séries de fonctions (ce sont ici ce qu'on appelle des séries entières, on va avoir l'occasion d'en parler plus longuement en cours d'année).