DM n° 2 : Cardinaux, dénombrabilité

Corrigé de l'exercice 1 – (Bases de voisinages)
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $a \in \mathbb{K}$ et $\mathcal{W}_a \subset \mathcal{V}(a)$. On dit que $\mathcal{W}_a$ est une base de voisinages de a si pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, il existe $W \in \mathcal{W}_a$ tel que $W \subset V$.
On appelle base globale de voisinages une partie $\mathcal{W}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ telle que pour tout $a \in E$, l'ensemble $\mathcal{W}(a) = \mathcal{W} \cap \mathcal{V}(a)$ soit une base de voisinages de a.

1. On suppose que $\mathcal{W}_a$ est une base de voisinages de a. Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
   - Supposons que $u_n \longrightarrow a$. Alors soit $W \in \mathcal{W}_a$. En particulier, $W \in \mathcal{V}(a)$, donc par caractérizatino topologique de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant n_0,\ u_n \in W}$.
   - Réciproquement, supposons que pour tout $W \in \mathcal{W}_a$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in W$. Soit alors $V \in \mathcal{V}(a)$ un voisinage quelconque de a. Par définition d'une base de voisinages, on dispose d'un voisinage $W \in \mathcal{W}_a$ tel que $W \subset V$. Par hypothèse, on dispose alors d'un entier n_0 tel que :
   $$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \in W \subset V.$$
   Ainsi, par caractérisation topologique de la convergence, $\boxed{u_n \to a}$.

1. (a)
   - Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On étudie plusieurs cas :
     * Si I est borné, on dispose de $a < b$ tels que $I =]a, b[$. Soit alors $x \in I$, et $r = \min(b - x, x - a) > 0$. On vérifie alors que
     $$a \leqslant x - r < x + r \leqslant b,$$
     donc $B(x, r) =]x - r, x + r[\subset]a, b[= I$. Ainsi, I est un voisinage de x. Cela étant vrai pour tout $x \in I$, on en déduit que $\boxed{I \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}}$.
     * Si $I =]a, +\infty[$, et $x \in I$, on défini de même $r = x - a > 0$, et on vérifie que $B(x, r) \subset I$. Ainsi, en core une fois, $\boxed{I \text{ est ouvert}}$.
     * Un argument symétrique montre que $] - \infty, b[$ est ouvert.
     * Pour terminer, les cas de $I = \mathbb{R}$ et $I = \varnothing$ sont triviaux (le premier en prenant des boules $B(x, 1)$, le deuxième en remarnquant que la propriété définissant un ouvert est quantifiée universellement sur l'ensemble vide, donc vraie par défaut).

     Ainsi, $\boxed{\text{les intervalles ouverts de } \mathbb{R} \text{ sont des ouverts}}$.
   - On note, pour $x, y \in \mathbb{C}$, $d(x, y) = |y - x|$. Soit $B = B(x, r)$ une boule ouverte de $\mathbb{C}$. Soit $y \in B$. Alors, par définition, $d(x, y) < r$. Notons $s = r - d(x, y) > 0$. Soit alors $z \in B(y, s)$. On a alors, pâr inégalité triangulaire,
   $$d(z, x) \leqslant d(z, y) + d(y, x) < r - d(x, y) + d(x, y) = r.$$
   Ainsi, $z \in B$. On en déduit que $B(y, s) \subset B$, et donc B est un voisinage de z.

     Ceci étant vrai pour tout $z \in B$, on en déduit que B est un ouvert de $\mathbb{C}$.

   (b) Par exemple, l'ensemble $\boxed{]0, 1[\cup]2, 3[}$ n'est pas un intervalle, et est ouvert (par le même argument, en trouvant une boule centrée en $x \in]0, 1[\cup]2, 3[$ et en distinguant suivant que $x \in]0, 1[$ ou $x \in]2, 3[$).

2. Soit $\mathcal{W}$ une base globale de voisinages, et U un ouvert. Soit $a \in U$. Alors $U \in \mathcal{V}(a)$, et par définition de $\mathcal{W}$, il existe $W_a \in \mathcal{W}(a) \subset \mathcal{W}$ tel que $a \in W_a \subset U$. On en déduit que
$$\bigcup_{a \in U} W_a \subset U = \bigcup_{a \in U} \{a\} \subset \bigcup_{a \in U} W_a.$$
Par propriété de double-inclusion, on en déduit que
$$\boxed{U = \bigcup_{a \in U} W_a}.$$

3. Soit $\mathcal{W} = \{]a, b[\mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2, a < b\}$.
   - Pour $c \in \mathbb{R}$, l'intervalle $]a, b[$ est dans $\mathcal{V}(c)$ si et seulement si $a < b < c$. Ainsi,
   $$\mathcal{W}(c) = \{]a, b[\mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2,\ a < c < b.\}.$$
   - Soit alors $V \in \mathcal{V}(c)$. Par définition, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subset V$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on dispose de $a \in]c - \varepsilon, c[\cap \mathbb{Q}$ et $b \in]c, c + \varepsilon[\cap \mathbb{Q}$. Ainsi, $]a, b[\in \mathcal{W}(c)$, et
   $$]a, b[\subset]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subset V.$$
   - On en déduit que $\boxed{\mathcal{W} \text{ est une base globale de voisinages}}$.
   - Par ailleurs, on peut définir une application :
   $$\varphi : \mathcal{W} \to \mathbb{Q}^2$$
   en définissant, pour $I \in \mathcal{W}$,
   $$\varphi(I) = (\inf(I), \sup(I)),$$
   c'est-à-dire, si $I =]a, b[$, $\varphi(I) = (a, b)$. L'application φ est injective, et comme $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable en tant que produit de deux ensembles dénombrables, on en déduit que $\mathcal{W}$ est au plus dénombrable. Puisqu'il est clairement infini, $\boxed{\mathcal{W} \text{ est dénombrable}}$.
4. On définit $\mathcal{W} = \{B(z, r) \mid z \in \mathbb{Q} + \mathrm{i}\,\mathbb{Q}, r \in \mathbb{Q}_+^*\}$.
   - Soit $a \in \mathbb{C}$. On a alors
   $$\mathcal{W}(a) = \{B(x, r) \mid |a - x| < r,\ a \in QQ = \mathrm{i}\,\mathbb{Q},\ r \in \mathbb{Q}_+^*\}.$$
   - Soit $a \in \mathbb{C}$ et $V \in \mathcal{V}(a)$. Par définition, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on dispose de $(\alpha, \beta, \rho) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+^*$ tels que
   $$|\alpha - \mathrm{Re}(a)| < \frac{\varepsilon}{3},\quad |\beta - \mathrm{Im}(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{et} \qquad \rho \in]0, \frac{\varepsilon}{3}.$$
   Soit $b = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$. On a alors, par inégalité triangulaire,
   $$|a - b| \leqslant |\alpha - \mathrm{Re}(a)| + |\beta - \mathrm{Im}(a)| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$
   On a alors, par inéégalité triangulaire, pour tout $z \in B(b, \rho)$:
   $$|z - a| \leqslant |z - b| + |b - a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$
   On en déduit que $z \in B(a, \varepsilon) \subset V$. Ainsi, $B(b, \rho) \subset V$, et $B(b, \rho) \in \mathcal{W}(a)$.
   On en déduit que $\boxed{\mathcal{W} \text{ est une base globale de voisinages}}$.
   - L'ensemble $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable en tant que produit cartésien d'ensembles dénombrables. De plus, l'application $\varphi : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+^* \to \mathcal{W}$ définie par
   $$\varphi(\alpha, \beta, r) = B(\alpha + \mathrm{i}\,\beta, r) \in \mathcal{W}$$
   est surjective, par définition de $\mathcal{W}$. Ainsi, $\mathcal{W}$ est au plus dénombrable, et infini, donc $\boxed{\mathcal{W} \text{ est dénombrable}}$.
5. Soit U une partie de $\mathbb{K}$ non vide. On se donne $\mathcal{W}$ définie comme dans la question 4 (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou la question 5 (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors les éléments de $\mathcal{W}$ sont des boules ouverts (en effet dans $\mathbb{R}$, $]a, b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$).
   - Supposons que U est ouvert. D'après la question 3, U est une union d'éléments de $\mathcal{W}$, donc il existe $\mathcal{Y} \subset \mathcal{W}$ tels que
   $$U = \bigcup_{W \in \mathcal{Y}} W.$$
   Comme $\mathcal{Y}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{W}$ qui est dénombrable, $\mathcal{Y}$ est au plus dénombrable, et les W sont des boules ouvertes. On en déduit que U est une union dénombrable de boules ouvertes.

- Supposons que U est une union au plus dénombrable de boules ouvertes :

$$U = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i).$$

Soit $x \in U$. On dispose donc de $i \in I$ tel que $x \in B(x_i, r_i)$. Ainsi, $B(x_i, r_i)$ étant ouvert d'après la question 2(a), on dispose de ε tel que

$$B(x, \varepsilon) \subset B(x_i, r_i) \subset U.$$

Ainsi, U est voisinage de tous ses points, donc ouvert.

Au moment où le devoir a été donné, la notion d'ouvert n'a pas été traitée de façon générale, raison pour laquelle le corrigé est écrit de cette façon. Avec les notions de topologie du chapitre 3, on peut directement se ramener à la propriété de l'union d'ouverts.

Corrigé de l'exercice 2 – (Nombre de discontinuités d'une fonction réglée)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est réglée si elle admet une limite à droite et à gauche en tout point x de $\mathbb{R}$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on note

$$\delta(x) = \max(f(x), \lim_{y \to x^-} f(y), \lim_{y \to x^+} f(y)) - \min(f(x), \lim_{y \to x^-} f(y), \lim_{y \to x^+} f(y)).$$

On pose, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R},\ \delta(x) \geqslant \varepsilon\}.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$.

   (a)
   - Soit $x \in A_\varepsilon$. Puisque f admet une limite à gauche ℓ^- en x, on dispose de $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $y \in]x - \eta_1, x[$
   $$|f(y) - \ell^-| < \frac{\varepsilon}{4}.$$
   Soit alors $(y, z) \in]x - \eta_1, x[^2$. On a donc, par inégalité triangulaire :
   $$|f(y) - f(z)| \leqslant |f(y) - \ell^-| + |\ell^- - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
   - On montre de la même manière qu'il existe $\eta_2 > 0$ tel que
   $$\forall (y, z) \in]x, x + \eta_2[^2, \quad |f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
   - En posant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on obtient donc
   $$\forall (y, z) \in]x - \eta, x[^2 \cup]x, x + \eta[^2, \boxed{|f(y) - f(z)| < \tfrac{\varepsilon}{2}}.$$

   (b)
   - Soit $a \in]x - \eta, x[$, et $\rho = \min(a - x + \eta, x - a) > 0$. On a alors $B(a, \rho) \subset]x - \eta, x[$. Pour tout $(y, z) \in B(a, \rho)$, on a donc
   $$|f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
   Par passage à la borne supérieure,
   $$0 \leqslant \sup_{y \in B(a,\rho)} f(y) - \inf_{z \in B(a,\rho)} f(z) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
   En particulier, comme
   $$\max(f(a), \lim_{y \to a^-} f(y), \lim_{y \to a^+} f(y)) \leqslant \sup_{y \in B(a,\rho)} f(y) \quad \text{et} \quad \min(f(a), \lim_{y \to a^-} f(y), \lim_{y \to a^+} f(y)) \geqslant \inf_{z \in B(a,\rho)} f(z),$$
   on en déduit que $\delta(a) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, donc que $a \notin A_\varepsilon$.
   - On montre de même que $]x, x + \eta[\cap A_\varepsilon = \varnothing$, d'où finalement :
   $$B(x, \eta) \cap A_\varepsilon = \{x\}.$$
   On dit que x est un point isolé de A_ε. Ainsi, A_ε est constitué uniquement de points isolés. On dit dans ce cas que A_ε est un ensemble discret.

2. Soit $a < b$ deux réels. On suppose que $A_\varepsilon \cap [a, b]$ est infini.

(a) Par hypothèse, on peut construire une suite (y_n) d'éléments 2 à 2 distincts de $A_\varepsilon \cap [a, b]$. Cette suite est une suite réelle bornée, donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstass, on peut en extraire une suite $(y_{\varphi(n)})$ convergente. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = y_{\varphi(n)}$.

Alors $\boxed{(x_n) \text{ est une suite convergente d'éléments 2 à 2 distincts de } A_\varepsilon \cap [a, b]}$.

Notons c sa limite.

(b) Supposons que $c \in A_\varepsilon$. Alors, d'après la question 1(b), on dispose de $\eta > 0$ tel que $B(c, \eta) \cap A_\varepsilon = \{c\}$.

Par ailleurs, par définition de la convergence, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$u_n \in B(c, \eta).$$

Comme par définition, on a aussi $u_n \in A_\varepsilon$, on en déduit que pour tout $n \geqslant N$,

$$u_n \in B(c, \eta) \cap A_\varepsilon = \{c\}, \qquad \text{i.e.} \qquad u_n = c.$$

Ceci contredit le fait que les u_n sont deux deux distincts.

Ainsi, $\boxed{c \notin A_\varepsilon}$.

(c) Soit $\varepsilon'' = \delta(c)$. D'après la question précédente, $\varepsilon'' < \varepsilon$. Soit $\varepsilon' \in]\varepsilon'', \varepsilon[$ et $\alpha = \varepsilon' - \varepsilon'' > 0$. Par définition de la limite à gauche, il existe η_1 tel que pour tout $z \in]c - \eta_1, c[$,

$$|f(z) - \lim_{y \to c^-} f(y)| < \frac{\alpha}{2}.$$

On en déduit que si $z \in]c - \eta_1, c[$,

$$f(z) \in \big[\min(f(x), \lim_{y \to x^-} f(y), \lim_{y \to x^+} f(y)) - \frac{\alpha}{2}, \max(f(x), \lim_{y \to x^-} f(y), \lim_{y \to x^+} f(y)) + \frac{\alpha}{2}\big].$$

On peut trouver de la même manière η_2 tel que pour tout $z \in]c, c + \eta_2[$,

$$f(z) \in \big[\min(f(x), \lim_{y \to x^-} f(y), \lim_{y \to x^+} f(y)) - \frac{\alpha}{2}, \max(f(x), \lim_{y \to x^-} f(y), \lim_{y \to x^+} f(y)) + \frac{\alpha}{2}\big].$$

En considérant $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, et en remarquant que le point c vérifie trivialement l'appartenance aussi,

$$\forall z \in B(c, \eta), f(z) \in \big[\min(f(x), \lim_{y \to x^-} f(y), \lim_{y \to x^+} f(y)) - \frac{\alpha}{2}, \max(f(x), \lim_{y \to x^-} f(y), \lim_{y \to x^+} f(y)) + \frac{\alpha}{2}\big].$$

Alors, si y et z sont dans $B(c, \eta)$, leurs images sont toutes deux dans un intervalle de longueur $\delta + \alpha$, donc

$$\boxed{\forall (y, z) \in B(c, \eta), \quad |f(y) - f(z)| \leqslant \delta + \alpha = \varepsilon' \in]0, \varepsilon[}.$$

(d) En passant au sup et à l'inf dans l'inégalité précédente, il vient

$$\sup_{y \in B(c, \eta)} f(y) - \inf_{y \in B(c, \eta)} f(y) \leqslant \varepsilon'.$$

Soit alors $z \in B(c, \eta) =]c - \eta, c\eta[$. Puisque z n'est pas au bord de cet intervalle, les limites à gauche et à droite en z sont les mêmes que celles de la restriction de f à $B(c, \eta)$, et on peut donc affirmer que

$$\lim_{y \to z^-} f(y) \in [\inf_{y \in B(c, \eta)} f(y), \sup_{y \in B(c, \eta)} f(y),$$

et de même pour la limite à droite, ainsi que pour la valeur de $f(y)$. Par conséquent,

$$\delta(y) \leqslant \sup_{y \in B(c, \eta)} f(y) - \inf_{y \in B(c, \eta)} f(y) \leqslant \varepsilon' < \varepsilon.$$

On en déduit que $\boxed{B(c, \eta) \cap A_\varepsilon = \varnothing}$, ce qui n'est pas compatible avec la convergence de $(x_n) \in A_\varepsilon^{\mathbb{N}}$ vers c.

Par conséquent, l'hypothèse initiale de notre preuve par l'absurde est fausse.

On en déduit que $\boxed{A_\varepsilon \cap [a, b] \text{ est fini}}$.

3. On peut décrire A_ε de la manière suivante :

$$A_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_\varepsilon \cap [-n,n].$$

Ainsi, d'après la question précédente, il s'agit d'une union dénombrable d'ensembles finis.
On peut donc conclure que $\boxed{A_\varepsilon \text{ est au plus dénombrable}}$

4. Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f. D'après la caractérisation de la limite par les limites à gauche et à droite, f est continue en x si et seulement si $\delta(x) = 0$. Ainsi, en passant au complémentaire :

$$D = \bigcup_{\varepsilon>0} A_\varepsilon.$$

Soit maintenant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que $\varepsilon_n < \varepsilon$, et donc $A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon_n}$. On en déduit que

$$D = \bigcup_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{\varepsilon_N}.$$

Il s'agit donc d'une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, donc $\boxed{D \text{ est au plus dénombrable}}$.

Corrigé du problème 1 – (Formule du crible de Poincaré)

Dans ce petit problème, nous nous intéressons à une généralisation de la formule du cardinal d'une union de 2 ensembles. Le but est de démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $A_1, \dots A_n$ sont des parties d'un ensemble E de cardinal fini, alors

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{I\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])\setminus\{\varnothing\}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|. \qquad (1)$$

Partie I – Première démonstration de la formule du crible

On propose une première démonstration, par récurrence sur n. On fixe un ensemble fini E.

1. • Pour $n = 1$, la formule à montrer est $|A_1| = |A_1|$ qui est trivialement vraie.
   • Pour $n = 2$, on obtient $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$, qui est une formule du cours.

2. Soit $n \geqslant 2$. On suppose que la formule (1) est valide pour tout n-uplets $(A_1, \dots, A_n)$ de parties de E. On se donne $(A_1, \dots, A_{n+1})$ un $n+1$-uplet de parties de E.

   (a) On utilise d'abord la formule du cours pour une union de 2 termes :

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| &= \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_n\right| \\ &= \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right|.\end{aligned}$$

   Par distributivité de l'intersection sur l'union, il vient alors :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right)\right|.$$

   On peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour la famille $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, ainsi que pour la famille $(A_i \cap A_{n+1})_{i\in[\![1,n]\!]}$ (de l'importance d'une bonne quantification sur les familles dans l'énoncé de la propriété de récurrence). Ainsi

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = |A_{n+1}| + \sum_{I\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])\setminus\{\varnothing\}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| - \sum_{I\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])\setminus\{\varnothing\}} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} (A_i \cap A_{n+1})\right|.$$

   Comme I est non vide dans les indexations, A_{n+1} apparaît au moins une fois dans les intersections $\bigcap_{i\in I}(A_i \cap A_{n+1})$, et le mettre plusieurs fois n'a pas tellement d'intérêt. Ainsi, pour tout I non vide,

$$\bigcap_{i\in I}(A_i \cap A_{n+1}) = A_{n+1} \cap \bigcap_{i\in I} A_i,$$

et on conclut donc finalement que

$$\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = |A_{n+1}| + \sum_{I\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)\setminus\{\varnothing\}} (-1)^{|I|+1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| - \sum_{I\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)\setminus\{\varnothing\}} (-1)^{|I|+1}\left|A_{n+1}\cap\bigcap_{i\in I} A_i\right|}.$$

(b) On peut poser dans la première somme le changement d'indice $I' = I \cup \{n+1\}$. Ce changement d'indice définit bien une injection,

$$\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)\setminus\varnothing \longrightarrow \{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket) \mid n+1 \in I\},$$

mais ce n'est pas tout à fait une surjection, puisque l'ensemble $I = \{n+1\}$ n'est pas dans l'image. En revanche, si on enlève cet ensemble, on obtient bien une bijection, et

$$\boxed{\sum_{I\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)\setminus\{\varnothing\}} (-1)^{|I|+1}\left|A_{n+1}\cap\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \sum_{\substack{I'\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\\ n+1\in I\\ I'\neq\{n+1\}}} (-1)^{|I'|}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|}.$$

En effet, le cardinal de I et I' n'étant pas de même parité, il faut changer le signe.

(c) On obtient donc :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = |A_{n+1}| + \sum_{I\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n\rrbracket)\setminus\{\varnothing\}} (-1)^{|I|+1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| + \sum_{\substack{I'\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\\ n+1\in I\\ I'\neq\{n+1\}}} (-1)^{|I'|+1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

En remarquant que $A_{n+1} = \bigcap\limits_{i\in\{n+1\}} A_i$, et en remarquant que les deux sommes portent sans redondance sur tous les sous-ensembles de $\llbracket 1,n+1\rrbracket$, distincts de $\varnothing$ et $\{n+1\}$, triés selon que $n+1$ est dedans (deuxième somme) ou non (première somme), on en déduit que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \sum_{I\in\mathcal{P}(\llbracket 1,n+1\rrbracket)\setminus\{\varnothing\}} (-1)^{|I|+1},$$

ce qui est bien la formule à démontrer pour l'union de $n+1$ parties.

On déduit du principe de récurrence la $\boxed{\text{validité de la formule du crible}}$.

Partie II – Deuxième démonstration de la formule du crible

Cette démonstration s'appuie sur des dénombrements et l'utilisation de fonctions indicatrices.

Soit E un ensemble fini, et $(A_1,\dots,A_n) \in \mathcal{P}(E)^n$. Pour $x \in E$, on note

$$J(x) = \{i \in \llbracket 1,n\rrbracket \mid x \in A_i\} \qquad \text{et} \qquad I(x) = |J(x)|.$$

1. Soit $x \in E$, $\ell \in \llbracket 1,n\rrbracket$. Soit $I \in \mathcal{P}_\ell(\llbracket 0,n\rrbracket)$.
   - Si $I \subset J(x)$, $\mathbb{1}_{\bigcap\limits_{i\in I} A_i}(x) = 1$;
   - Si $I \not\subset J(x)$, $\mathbb{1}_{\bigcap\limits_{i\in I} A_i}(x) = 0$.

   Ainsi,

$$\sum_{I\in\mathcal{P}_\ell(\llbracket 1,n\rrbracket)} \mathbb{1}_{\bigcap\limits_{i\in I} A_i}(x) = \sum_{I\in\mathcal{P}_\ell(J(x))} 1 = |\mathcal{P}_\ell(J(x))|,$$

   et comme $J(x)$ est de cardinal $I(x)$, il vient

$$\boxed{\sum_{I\in\mathcal{P}_\ell(\llbracket 1,n\rrbracket)} \mathbb{1}_{\bigcap\limits_{i\in I} A_i}(x) = \binom{I(x)}{\ell}}.$$

2. Puisque $n \geqslant I(x)$, et par convention sur les coefficients binomiaux, on trouve :

$$\sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{\ell}\binom{I(x)}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{I(x)}(-1)^{\ell}\binom{I(x)}{\ell} = (1-1)^{I(x)} = 0^{I(x)},$$

d'après la formule du binôme.

Ainsi,

- si $I(x) > 0$, $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, et par conséquent,

$$\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{\ell}\binom{I(x)}{\ell} = 0 = 1-1 = 1 - \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}(x);$$

- si $I(x) = 0$, alors $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, et d'un autre côté $0^0 = 1$, donc

$$\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{\ell}\binom{I(x)}{\ell} = 1 = 1 - \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}(x).$$

Dans les deux cas, on obtient donc :

$$\boxed{\sum_{\ell=0}^{n}(-1)^{\ell}\binom{I(x)}{\ell} = 1 - \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}(x)}.$$

3. En combinant les questions 1 et 2, on a donc, pour tout $x \in E$,

$$\binom{I(x)}{0} + \sum_{\ell=1}^{n}(-1)^{\ell}\sum_{I \in \mathcal{P}_{\ell}(\llbracket 1,n \rrbracket)} \mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}(x) = 1 - \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}(x),$$

donc

$$\sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)\setminus\{\varnothing\}} (-1)^{|I|+1}\mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}(x) = \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}(x).$$

En sommant sur x, il vient alors

$$\sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)\setminus\{\varnothing\}} (-1)^{|I|+1}\sum_{x \in E}\mathbb{1}_{\bigcap_{i \in I} A_i}(x) = \sum_{x \in E}\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}(x),$$

et donc :

$$\boxed{\sum_{I \in \mathcal{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)\setminus\{\varnothing\}} (-1)^{|I|+1}\left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|},$$

ce qui est bien la formule du crible.

Partie III – Application de la formule du crible au dénombrement des surjections

Soit E et F deux ensembles de cardinaux respectifs n et m. On note $\mathcal{S}(E,F)$ l'ensemble des applications surjectives de E dans F.

Pour $b \in F$, on note $\mathcal{F}_b = \{f \in F^E,\ b \notin \operatorname{Im}(f)\}$.

1. Soit $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, et $B \in \mathcal{P}_k(F)$. Un élément $f \in F^E$ est dans $\bigcap_{b \in B} \mathcal{F}_b$ si et seulement si son image ne contient aucun élément de B, donc si son image est incluse dans $F \setminus B$. C'est une condition nécessaire et suffisante, ainsi

$$\left|\bigcap_{b \in B} \mathcal{F}_b\right| = |(F\setminus B)^E| = \boxed{(m-k)^n}.$$

2. Une application f est surjective si et seulement si tout $b \in F$ est dans l'image, donc si f n'est dans aucun $\mathcal{F}_b$. Ainsi, les complementaires étant pris dans F^E :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}(E,F)| &= \left|\bigcap_{b\in F}(\mathcal{F}_b)^c\right| \\
&= \left|\left(\bigcup_{b\in F}\mathcal{F}_b\right)^c\right| \\
&= |F^E| - \left|\bigcup_{b\in F}\mathcal{F}_b\right| \\
&= m^n - \sum_{B\in\mathcal{P}(F)\setminus\{\varnothing\}} (-1)^{|B|+1}\left|\bigcap_{b\in B}\mathcal{F}_b\right| \\
&= m^n - \sum_{B\in\mathcal{P}(F)\setminus\{\varnothing\}} (-1)^{|B|+1}(m-k)^n
\end{aligned}$$

grâce à la formule du crible. On en déduit, en triant les parties de F suivant leur cardinal, que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}(E,F)| &= m^n - \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{B\in\mathcal{P}_\ell(F)} (-1)^{\ell+1}(m-\ell)^n \\
&= m^n + \sum_{\ell=1}^{m}(-1)^\ell\binom{m}{\ell}(m-\ell)^n.
\end{aligned}$$

Un changement d'indice $k = m - \ell$ et la symétrie des coefficients binomiaux amène finalement

$$|\mathcal{S}(E,F)| = m^n + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-k}\binom{m}{\ell}k^n = \boxed{\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{\ell}k^n}.$$

Corrigé du problème 2 – Théorème de Cantor-Bernstein

Question préliminaire

On construit $f : E \to F$ par :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in E_1 \\ f_2(x) & \text{si } x \in E_2. \end{cases}$$

Cette application est bien définie, puisque x ne peut être à la fois dans E_1 et E_2, et puisque tout x de E est dans l'un des deux.
On définit de même la fonction $g : F \to E$, en échangeant le rôle de E et F et en remplaçant f_1 par f_1^{-1} et f_2 par f_2^{-1}. De même, g est bien définie. Soit alors $x \in E$. Si $x \in E_1$, alors $f(x) = f_1(x) \in F_1$, donc $g(f(x)) = f_1^{-1}(f_1(x)) = x$. On montre de la même façon que $g \circ f(x) = x$ lorsque $x \in E_2$. Ainsi, $g \circ f = \mathrm{id}_E$. De même $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
Les fonctions f et g étant réciproques l'une de l'autre, elles sont bijectives. On a bien construit une $\boxed{\text{bijection de } E \text{ dans } F}$.

Partie I – Une première démonstration

1. (a) De toute évidence, $E \in \mathcal{S}$, donc $\boxed{\mathcal{S} \neq \varnothing}$.

   (b) Par croissance de φ, pour tout A de $\mathcal{S}$, $M \subset A$, donc $\varphi(M) \subset \varphi(A)$. Ainsi,

$$\varphi(M) =\subset \bigcap_{A\in\mathcal{S}}\varphi(A).$$

   Or, pour tout A de $\mathcal{S}$, par définition de $\mathcal{S}$, on a $\varphi(A) \subset A$. Ainsi,

$$\boxed{\varphi(M) \subset \bigcap_{A\in\mathcal{S}} A = M}.$$

(c) Puisque φ est croissante, on a alors $\varphi(\varphi(M)) \subset \varphi(M)$. Comme par définition de φ, $\varphi(M) \in \mathcal{P}(E)$, on en déduit, par définition de $\mathcal{S}$, que $\boxed{\varphi(M) \in \mathcal{S}}$.

Par principe de double inclusion, on a bien $\boxed{\varphi(M) = M}$.

2. On définit $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ par :

$$\varphi(A) = \complement_E \left(g \left(\complement_F f(A) \right) \right).$$

Pour montrer que φ admet un point fixe, il suffit, d'après ce qui précède, de montrer que φ est croissante. Soit A et B deux sous-ensembles de E tels que $A \subset B$. On a alors $f(A) \subset f(B)$, donc $\complement_F f(B) \subset \complement_F f(A)$, et en prenant l'image par g :

$$g \left(\complement_F f(B) \right) \subset g \left(\complement_F f(A) \right).$$

En passant une nouvelle fois au complémentaire, on obtient :

$$\complement_E \left(g \left(\complement_F f(B) \right) \right) \subset \complement_E \left(g \left(\complement_F f(A) \right) \right), \qquad \text{soit:} \qquad \varphi(A) \subset \varphi(B).$$

Ainsi, φ est une application croissante de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, donc $\boxed{\text{admet un point fixe } M}$.

3. La fonction f étant injective, toute restriction de f est encore injective. Ainsi, $f_{|M}$ est injective. De plus, l'image de l'application $f_{|M}$ est par définition $f(M)$, donc $f_{|M}$ se corestreint sur $f(M)$ en une application f_1, dont l'image est également $f(M)$. L'application $f_1 : M \longrightarrow f(M)$ est donc surjective, et l'injectivité est préservée par corestriction. Ainsi, f_1 est une $\boxed{\text{bijection de } M \text{ sur } f(M)}$.

4. Soit $N = \complement_F f(M)$.

(a) Par définition de φ, et par la propriété de point fixe de M, $\complement_E g(N) = \varphi(M) = M$, donc $\boxed{g(N) = \complement_E M}$.

(b) Le même argument que pour f_1 montre que g se corestreint en une bijection de N sur $g(N)$, donc en une $\boxed{\text{bijection de } N \text{ sur } \complement_E M}$.

5. On dispose d'une bijection $f_1 = M \longrightarrow f(M)$ et d'une bijection $g_1^{-1} : \complement_E M \longrightarrow \complement_F f(M) = N$. Ainsi, d'après la question préliminaire, il existe une $\boxed{\text{bijection } h : E \to F}$ (construite explicitement dans cette question)

Partie II – Une deuxième démonstration

1. (a) Puisque $C_0 \subset C$, on a $\complement_E C \subset \complement_E C_0$, soit $\boxed{D \subset B}$.

(b) Par définition de D, $\boxed{\{D, C\} \text{ est un partage de } E}$. Par conséquent, puisque $B \subset E$, $\{D \cap B, C \cap B\}$ est un partage de E. or, $D \cap B = D$ d'après la question précédente, et, par distributivité,

$$C \cap B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (C_n \cap B).$$

Par définition de C_0, $C_0 \cap B = \varnothing$, et par ailleurs, pour tout $n \geqslant 1$, par construction, $C_n \subset u(E) \subset B$. Ainsi, $C_n \cap B = C_n$. Par conséquent,

$$C \cap B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n = C'.$$

On en déduit que $\boxed{\{D, C'\} \text{ est un partage de } B}$.

(c) D'après le cours, et d'après la définition de la suite (C_n),

$$u(C) = u \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n \right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n,$$

soit : $\boxed{u(C) = C'}$.

(d) Puisque u est injective, u se restreint à C en une application d'image C' ; si on corestreint encore cette application à C', on gagne la surjectivité sans perdre l'injectivité. Ainsi, il existe une bijection $u_1 : C \to C'$. Par ailleurs, il existe une bijection $u_2 : D \to D$ (par exemple l'identité). La question préliminaire, dont les hypothèses sont assurées par la question 1(b), donne alors l' $\boxed{\text{existence d'une bijection de } E \text{ dans } B.}$

Remarquez la similitude de cet argument avec l'argument de l'hôtel de Hilbert : on pousse les éléments par paquets de C_k pour laisser de la place aux éléments de C_0.

2. La fonction $u = g \circ f$ est injective de E dans E, comme composée de deux injections. De plus, elle est à valeurs dans $g(F)$. Elle définit donc par corestriction une application injective $\tilde{u} : E \to g(F)$. D'après le lemme précédent, on en déduit l'existence d'une bijection de E sur $g(F)$. Par ailleurs, g étant injective, sa corestriction à son image est une bijection $\tilde{v}$ de F sur $g(F)$. Alors la composée $\tilde{v}^{-1} \circ \tilde{u}$ est une $\boxed{\text{bijection de } E \text{ vers } F}$, en tant que composée de deux bijections.

Partie III – Une troisième démonstration

1. La suite commençant en un élément x de E ne peut vérifier qu'une des trois propriétés de l'énoncé, et en vérifie nécessairement l'une des trois. Ainsi, tout x de E appartient à un et un seul des ensembles E_E, E_F et E_∞. C'est bien dire que ces ensembles sont deux à deux distincts, et que leur union est E. C'est la définition d'un $\boxed{\text{partage de } E}$.
2. Soit $x \in E_E$, et $(u_n(x))_{n \in [\![0,N]\!]}$ la suite finie associée à x (qui s'arrête en E). Ainsi, x_N est dans E. Soit $y = f(x)$. Alors x est l'unique antécédent de y (l'unicité provenant de l'injectivité de f). Ainsi, $u_0(y) = y$ et $u_1(y) = x$. À partir de là, les antécédents successifs, uniques par injectivité, sont les mêmes que ceux de x : l'unique antécédent de $u_1(y) = u_0(x)$ est $u_1(x)$, ainsi $u_2(y) = u_1(x)$ et en continuant ainsi (on pourrait écrire une récurrence bornée assez triviale),
$$\forall n \in [\![1, N+1]\!], \quad u_n(y) = u_{n-1}(x).$$
En particulier, ces termes sont bien définis, et $u_{N+1}(y) = u_N(x)$, qui n'a pas d'antécédent (par g puisque c'est un élément de E). Ainsi, tout comme la suite issue de x, la suite issue de y s'arrête au point $u_{N+1}(y) = u_N(x)$, qui est élément de E. Ainsi, $y \in F_E$.
On en déduit que $\boxed{f(E_E) \subset F_E}$.
Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in F_E$, et $(u_n(y))_{n \in [\![0,M]\!]}$ la suite (finie et s'arrêtant en E) issue de y. Alors $M \geqslant 1$ (sinon, cela signifierait que la suite s'arrête tout de suite, donc au point y qui est élément de F, ce qui impliquerait $y \in F_F$ ce qui est contradictoire). On peut donc considérer $x = u_1(y) \in E$, qui par définition est un antécédent de y. Ainsi, $f(x) = y$. Un raisonnement similaire au précédent montre qu'alors,
$$\forall n \in [\![0, M-1]\!], \quad u_n(x) = u_{n+1}(y).$$
En particulier, la suite issue de x s'arrête en $u_M(y) \in E$. Ainsi, $x \in E_E$ et $f(x) = y$. On en déduit que $y \in f(E_E)$, donc $\boxed{F_E \subset f(E_E)}$
L'égalité $f(E_E) = F_E$ alors obtenue par double-inclusion justifie que f définit par restriction et corestriction une application surjective $\boxed{f_E : E_E \to F_E}$. L'application f étant injective, sa restriction aussi, donc $\boxed{f_E \text{ est bijective}}$.
La situation est symétrique en f et g, donc g définit aussi par restriction corestriction une $\boxed{\text{bijection } g_F = F_F \to E_F}$.
3. Montrons enfin que f se restreint et corestreint également en une bijection $f_\infty : E_\infty \to F_\infty$. Nous procédons comme dans la question précédente
   - f_∞ est bien définie car $f(E_\infty) \subset F_\infty$. En effet, si $y \in f(E_\infty)$, il existe un antécédent $x \in E_\infty$ de y, et comme précédemment, la suite issue de y peut se décrire en fonction de celle issue de x ; celle-ci étant infinie, on obtient :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(y) = u_{n-1}(x),$$
   donc la suite issue de y est infinie. Cela prouve que $y \in F_\infty$, donc que $f(E_\infty) \subset F_\infty$.
   - f_∞ est est surjective. En effet, soit $y \in F_\infty$. Sa suite étant infinie, on peut considérer son premier élément $x = u_1(y)$, qui est dans E. Comme précédemment, la suite issue de x se décrit en fonction de la suite issue de y, et en particulier, elle est infinie. Ainsi, $x \in E_\infty$. Ainsi, f_∞ est définie en x (et coïncide avec f par définition), donc $f_\infty(x) = y$. Cela prouve la surjectivité de f_∞.
   - L'injectivité découle de celle de f.

   Ainsi, $\boxed{f_\infty \text{ est une bijection de } E_\infty \text{ dans } F_\infty}$.
   On aurait pu montrer de la même manière que g induit une bijection de F_∞ vers E_∞.
   On dispose donc de trois bijections $f_E : E_E \to F_E$, $g_E^{-1} : E_F \to F_F$ et $f_\infty : E_\infty \to F_\infty$.

D'après la question préliminaire qu'on généralise facilement à 3 termes (et pour un partage plutôt qu'une partition) et d'après la question III-1, ces trois bijections permettent de construire une $\boxed{\text{bijection de } E \text{ vers } F}$, ce qui prouve une nouvelle fois le théorème de Cantor-Bernstein.

Partie IV – Quelques applications classiques

1. On définit $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ par $\Phi(A) = \mathbb{1}_A$, la fonction indicatrice de A dans $\mathbb{N}$. La fonction Φ admet une récirpoque $\Psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, définie par $\Psi(\chi) = \chi^{-1}(1)$. La vérification du fait que ces applications sont réciproques l'une de l'autre est immédiate ; Ainsi, Ψ est une bijection, ce qui montre que $\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ et } \{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ ont même cardinal}}$.
2. On construit une application $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de la manière suivante. Étant donné $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, on construit $\chi = \Phi(f)$ de la manière suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = f(0) + \cdots + f(k) + k - 1, \text{ pour un certain } k \text{ dans } \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Ainsi, les images successives des entiers par χ définissent une suite de 0 et de 1 tels que la position du premier 1 est égale à $f(0)$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de 0 s'intercalant entre le n-ième 1 et $(n+1)$-ième 1 est égal à $f(n+1)$.
La fonction Φ ainsi définie est une injection (mais pas une bijection) : en effet, si $\Phi(f) = \Phi(g) = \chi$, alors on retrouve f et g en regardant la position du premier 1 dans la suite des images de χ, et le nombre de 0 séparant deux 1 consécutifs. On obtient alors la même description pour f et g, prouvant que Φ est injective. Elle n'est pas surjective, car les applications χ dans l'image de Φ prennent nécessairement une infinité de fois la valeur 1.
Mais on peut conclure tout de même : Φ est une injection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et l'inclusion définit une injection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Le théorème de Bernstein nous assure alors que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ont même cardinal.
3. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ont même cardinal. L'inclusion du deuxième vers le premier définit un injection $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$. Dans l'autre sens, on peut faire un détour par $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, et construire une injection par composition :
$$[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}},$$
où la première flèche est issue de l'inclusion, et la deuxième est la bijection obtenue dans la question précédente. La composée des deux est donc injective, en tant que composée d'injections.
Le théorème de Berstein permet alors d'affirmer que $\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ et } [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \text{ ont même cardinal}}$.
4.
   - À tout réel x de $[0,1[$, on associe la suite des décimales de son unique développement propre en base 10. Ainsi, on définit $f \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ en posant $f(i)$ comme étant la $i+1$-ième décimale de son développement. On pose $\Phi(x) = f$. La fonction Φ est injective, car l'égalité $\Phi(x) = \Phi(y)$ signifie que x et y ont même développement décimal, ce qui n'est possible que si $x = y$.
   - Réciproquement, étant donné $f \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$, on peut définie $\Psi(f)$ comme l'unique réel x dont le développement décimal est donné par les valeurs successives de f. Le problème rencontré ici, c'est que Ψ peut prendre la valeur 1, pour la fonction f constante de valeur 9, De plus, elle n'est pas injective, car les nombres décimaux ont deux développements (l'un terminant par des 0, l'autre par des 9). Le problème rencontré provient donc du fait que f peut prendre un grand nombre de fois la valeur 9. On va donc lui interdire cette valeur.
   - On pourrait construire alors Ψ à partir des fonctions à valeurs dans $[\![0,8]\!]$, afin d'éviter les développements terminant par des 9. Ce n'est pas dur de montrer, comme précédemment que l'ensemble de ces fonctions est de même cardinal que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, donc que $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$. Mais tant qu'à faire, autant revenir directement à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On construit donc $\Psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1[$ en associant à $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'unique réel $x = \Psi(f)$ dont le développement décimal est constitué de la suite des valeurs prises par f. Cette fois, puisque les décimales de x sont toutes égales à 0 ou 1, il s'agit d'un développement propre. Cela nous assure en particulier que $x \in [0,1[$, et que Ψ est injective, par unicité du développement propre.
   - Ayant des injections dans chaque sens (en composant la seconde par l'injection $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ issue de l'inclusion), le théorème de Bernstein nous permet de conclure que $\boxed{[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \text{ et } [0,1[\text{ ont même cardinal}}$.

5. L'inclusion définit une injection $i : [0,1[\to \mathbb{R}$. On peut facilement trouver une injection dans l'autre sens, avec les fonctions usuelles. En effet, $f : x \mapsto \tan((2\pi x - \frac{3\pi}{2}))$ est strictement croissante sur $]\frac{1}{2}, 1[$, de limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bords de l'intervalle, et continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle est donc surjective de $]\frac{1}{2}, 1[$ dans $\mathbb{R}$ et injective par stricte croissance. Elle est donc bijective. Sa réciproque est donc une application bijective $g : \mathbb{R} \to]\frac{1}{2}, 1[$. En la composant par l'injection $i :]\frac{1}{2}, 1[\to [0,1[$ issue de l'inclusion, on obtient une injection de $\mathbb{R}$ dans $[0,1[$.

   Le théorème de Bernstein assure alors que $\boxed{\mathbb{R} \text{ et } [0,1[\text{ ont même cardinal}}$.

   Remarque : g peut se décrire directement avec de l'arctangente, si on connait cette fonction.

6. On compose les différentes bijections (ou leurs réciproques) obtenues en 3, 4 et 5, pour définir une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ et } \mathbb{R} \text{ ont même cardinal}}$.

7. On adapte l'exemple du cours qui peut se faire directement dans $\mathbb{R}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $z \in \mathbb{R}$ comme étant l'unique réel dont le développement décimal est défini par

$$z_i = \begin{cases} x_{\frac{i}{2}} & \text{si } i \text{ est pair} \\ y_{\frac{i-1}{2}} & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases},$$

   où x_i, y_i et z_i représentent respectivement le chiffre de poids 10^i des nombres x, y et z dans la représentation décimale propre. Ainsi, le chiffre des unités est de rang 0, celui des dizaines de rang 1, et les chiffres après la virgule sont numérotés négativement. Au besoin, on rajoute des 0 devant le chiffre de plus haut poids de x et de y, pour avoir une bonne définition de z.

   Comme on part des développements propres de x et y le développement de z sera également un développement propre. Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ainsi définie. Si $\Phi((x,y)) = \Phi((x', y')) = z$, l'unique développement propre de z permet donc de retrouver le développement de x et celui de y (en ne gardant qu'un chiffre sur 2). Faisant de même avec x' et y', on en déduit que x et x' ont même développement, donc $x = x'$ et de même $y = y'$. Cela prouve l'injectivité de $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   Une injection dans l'autre sens est facile à trouver : il suffit par exemple de considérer $\Psi : x \mapsto (x, x)$.

   Le théorème de Berstein permet de conclure que $\boxed{\mathbb{R} \text{ et } \mathbb{R}^2 \text{ ont même cardinal}}$.

8. Une première démonstration consiste en une utilisation directe du théorème de Berstein. On construit sans problème une injection $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, par $A \mapsto \mathbb{1}_A$.

   Réciproquement, on utilise l'injection $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ construite précédemment. Soit alors $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on définit

$$\Psi(f) = \{\varphi(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}.$$

   Cette application est injective. En effet, supposons $\Psi(f) = \Psi(g)$. soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition, $\varphi(x, f(x)) \in \Psi(f) = \Psi(g)$. Ainsi, par définition de $\Psi(g)$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x, f(x)) = \varphi(y, g(y))$. Puisque φ est bijective, $(x, f(x)) = (y, g(y))$, de quoi on déduit $x = y$ et $f(x) = g(y)$, et enfin $g(x) = f(x)$. Ceci étant vrai pour tout x, $f = g$. Ainsi, Ψ est une injection de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

   Le théorème de Cantor-Berstein prouve alors que $\boxed{\mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ et } \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ ont même cardinal}}$.

9. La deuxième preuve consiste à se servir de ce qui précède. En fait, si on regarde de près, il s'agit grossièrement de la même preuve, mais rédigée un peu différemment.

   L'injection $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est la même que plus haut.

   Une fonction f est déterminée par son graphe $G_f \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Cela nous donne une injection $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

   On utilise alors le lemme suivant : si $f : A \to B$ est une bijection, alors $\tilde{f} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ aussi. Cela résulte d'un exercice vu en cours (séparant injectivité et bijectivité), mais se redémontre très facilement directement en utilisant la bijectivité. Je laisse en exercice. Ainsi, la question 7 permet de définir une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. En composant avec l'injection $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, on en déduit une injection $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

   On termine encore une fois par le théorème de Cantor-Berstein.