Lycée Lakanal, Sceaux
MP – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 02/10/2024, 21h00

DM n° 3 : Intégrales généralisées, topologie

Corrigé de l'exercice – (Compacité au sens de Borel et Lebesgue)

1. (a) Soit (u_n) une suite de K, n'ayant pas de valeurs d'adhérence (dans K). Alors pour tout $k \in K$, k n'est pas valeur d'adhérence de (u_n), donc, par caractérisation des valeurs d'adhérence par accumulation, il existe $\varepsilon_k > 0$ tel que $\mathring{B}(k, \varepsilon_k)$ contienne un nombre fini de termes de la suite u_n.

   On a alors
   $$\boxed{K = \bigcup_{k \in K} \{k\} \subset \bigcup_{k \in K} \mathring{B}(k, \varepsilon_k)}$$
   Par conséquent, on a bien recouvert K par des boules ouvertes contenant chacune un nombre fini de termes de la suite (u_n).

   (b) Supposons que K est BL-compact. Alors si (u_n) est une suite de K sans valeur d'adhérence dans K, on peut considérer le recouvrement de K de la question précédente, et en extraire un recouvrement fini. On dispose donc d'éléments $k_1, \dots, k_n$ de K tels que
   $$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{B}(k_i, \varepsilon_{k_i}).$$
   Chacune de ces boules ne contenant qu'un nombre fini de termes de u_n, on en déduit que K ne peut également contenir qu'un nombre fini de termes de la suite (u_n), ce qui contredit la définition de cette suite (à valeurs dans K).

   Ainsi, on en déduit que (u_n) admet bien une valeur d'adhérence dans K, donc que $\boxed{K \text{ est BW-compact}}$.

2. (a) On suppose que K n'est pas précompact. On dispose donc de $\varepsilon > 0$ tel que K ne puissa pas être recouvert par des boules ouvertes de rayon ε.

   Soit $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$. Les boules $\mathring{B}(x_i, \varepsilon)$ ne recouvrent pas K (puisqu'il n'est pas précompact), et par conséquent, on peut trouver $\boxed{x_{n+1} \in K}$ tel que
   $$x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{B}(x_i, \varepsilon).$$
   En particulier, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\boxed{\|x_{n+1} - i\| \geqslant \varepsilon}$.

   (b) Avec les hypothèses de la question précédente, on peut donc construire par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $p < n$, $\|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$. En particulier, par symétrie, pour tout $n \neq p$, $\|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$. Supposons que (u_n) admette une valeur d'adhérence. On dispose alors d'une extractrice φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge, et donc $u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)} \longrightarrow 0$. Or, $\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \geqslant \varepsilon$, ce qui est contradictoire.

   On en déduit que (u_n) ne peut pas admettre de valeur d'adhérence et par conséquent, K n'est pas BW-compact.

   En contraposant le résultat qu'on vient de montrer, on a bien démontré que :
   $\boxed{\text{si } K \text{ est BW-compact, alors il est précompact}}$.

3. Supposons K BW-compact, et soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts recouvrant K. On suppose par l'absurde que pour tout $r > 0$, il existe x tel que $B(x, r)$ ne soit inclus dans aucun U_i.

   On peut donc définir $y_n \in K$ tel que $B(y_n, \frac{1}{2^n})$ ne soit inclus dans aucun U_i. On peut extraire une suite $(y_{\varphi(n)})$ de (y_n) convergeant vers un élément $a \in K$, car K est supposé BW-compact. On pose alors $r_n = \frac{1}{2^{\varphi(n)}} \longrightarrow 0$, et $x_n = y_{\varphi(n)}$.

Puisque $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de K, on dispose de $i \in I$ tel que $a \in U_i$. Puisque U_i est ouvert, on dispose de $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset U_i$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $r_n < \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui est possible par convergence de ces deux suites. On a alors, par inégalité triangulaire,

$$B(x_n, r_n) \subset B(a, \varepsilon) \subset U_i,$$

ce qui contredit la définition de x_n et r_n.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe } r > 0 \text{ tel que pour tout } x \in K,\ B(x,r) \text{ soit inclus dans l'un des } U_i}$

4. Supposons que K est BW-compact, et soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de K par des ouverts. D'après la question précédente, on dispose de $r > 0$ tel que poru tout $x \in K$, $B(x, r)$ soit inclus dans l'un des U_i.

   Or, K est précompact d'après la question 2(b), donc peut se recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes de rayon r :

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, r).$$

   Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on peut donc définir un indice $i_j \in I$ tel que $B(x_j, r) \subset U_{i_j}$. Par conséquent,

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j},$$

   et la famille $(U_{i_j})_{j\in[\![1,n]\!]}$ est un recouvrement fini de K, extrait de $(U_i)_{i\in I}$. On en déduit que $\boxed{K \text{ est BL-compact}}$.

Corrigé de l'exercice – (Théorème de Riesz)

1.
   - On suppose E de dimension finie. Alors soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $S(0, 1)$. Par définition, cette suite est bornée, et donc, puisqu'on est en dimension finie, on peut utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass (on utiilise ici l'équivalence des normes puisqu'on n'a montrer BW que pour une norme particulière), et extraire une suite $x_{\varphi(n)} \longrightarrow x$.
   - Par ailleurs, on a montré dans le cours que $S(0, 1)$ est fermé. Ainsi, par stabilité par passage à la limite on a bien $x \in S(0, 1)$.
   - Ainsi, $\boxed{S(0,1) \text{ est compacte}}$.

2. Soit (x_n) une suite d'éléments de F convergeant dans E vers un élément ℓ. On considère $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_d)$ une base de F.

   On suppose par l'absurde que $\ell \notin F$, et on considère $G = F + \mathbb{K}\ell$, donc une base est $\mathcal{B}' = (b_1, \dots, b_{d+1})$, où $b_{d+1} = \ell$. La convergence de (u_n) vers ℓ dans E équivaut à la convergence de (u_n) vers ℓ dans G, pour la norme restreinte à G. Puisque G est de dimension finie, cette norme est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$ associée à $\mathcal{B}'$, donc à la convergence coordonnée par coordonnée.

   Or, la coordonnée sur b_{d+1} des u_k est 0, et celle de ℓ est 1, ce qui contredit la convergence coordonnée par coordonnée.

   Ainsi, $\ell \in F$, ce qui montre que $\boxed{F \text{ est fermé}}$.

3. On suppose $F \neq E$. Soit $x \in E\backslash F$.

   (a)
   - Tout d'abord, F étant non vide, $d(x, F)$ est bien défini, comme borne inférieur d'une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$.
   - Si $d(x, F) = 0$, par caractésiation de l'adhérence par la distance, $x \in \overline{F}$. Or, F étant fermé, $\overline{F} = F$, donc $x \in F$, ce qui contredit nos hypothèses.
   - Ainsi, $\boxed{d(x, F) = \delta > 0}$.
   - Par définition de la borne inférieure, il existe alors $y \in F$ tel que $\boxed{\|x - y\| = d(x, y) < 2\delta}$.

   (b) Soit alors $z \in F$, et notons $e = \dfrac{x - y}{\|x - y\|}$. On a

$$\|z - e\| = \frac{\|z\|x - y\| + x - y\|}{\|x - y\|} = \frac{\|x - (y - z\|x - y\|)\|}{\|x - y\|}.$$

Or, comme $y - z\|x-y\| \in F$, par définition de $d(x,F)$, on peut dire que

$$\|x - (y - z\|x-y\|)\| \geqslant \delta,$$

et donc

$$\|z - e\| > \frac{\delta}{2\|y-x\|}.$$

Ceci étant vrai pour tout $z \in F$, on en déduit, par passage à la borne inférieur, que

$$d(x,F) \geqslant \frac{\delta}{\|x-y\|} \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{d(x,F) > \tfrac{1}{2}},$$

par définition de y. J'ai gardé y jusqu'au bout, afin d'obtenir l'inégalité stricte, sinon elle devient large au dernier passage à l'inf. Cela dit, l'inégalité large suffit pour terminer l'exercice.

4. On suppose E de dimension infinie.
   (a) On construit (u_n) par récurrence.
   - u_0 est choisi quelconque dans E
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $(u_0, \dots, u_n)$ sont construits vérifiant les inégalités $\|u_i - u_j| > \frac{1}{2}$, on considère $F = \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n)$, sous-espace vectoriel de dimension finie de E. En particulier, E étant de dimension infinie, $F \subsetneq E$.

     D'après la question précédente il existe $u_{n+1} \in S$ tel que pour tout $i \leqslant n$, $\|u_{n+1} - u_i\| > \frac{1}{2}$, ce qui permet de poursuivre la construction.

     Ainsi, il existe une $\boxed{\text{famille } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de vecteurs de } S \text{ tels que pour tout } i < j,\ \|u_i - u_j\| > \tfrac{1}{2}}$.

   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de S construite dans la question précédente n'a pas de valeur d'adhérence. En effet, pour toute extractrice φ, on a

$$|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}| > \frac{1}{2},$$

   donc $u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}$ ne tend pas vers 0, ce qui empêche la convergence de $(u_{\varphi(n)}$.

   Ainsi, l'existence d'une telle suite montre que $\boxed{S \text{ n'est pas compacte}}$.

5. On adapte les exemples du cours, en se servant de cette suite (u_n). Il suffit par exemple de se donner un vecteur $a \in S$, puis de définir (v_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \begin{cases} u_n & \text{si } n \text{ pair} \\ a & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Puisque (u_{2n}) n'a pas de valeur d'adhérence, la seule valeur d'adhérence est a. Mais (v_n) n'est pas convergente, puisqu'en particulier, (v_{2n}) n'admet pas de limite.

   Construire une suite de S ayant une unique valeur propre, mais non convergente.

On a montré le théorème de Riesz affirmant que la sphère unité d'un e.v.n. E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

Corrigé du problème 1 –

Partie I – L'intégrale de Dirichlet $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$.

1. - La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$, et peut se prolonger par continuité en 0. Ainsi, l'intégrale est convergente en la borne 0.
   - La fonction $x \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ admettant une limite finie en $+\infty$, on peut faire une IPP sur l'intervalle $[1, +\infty[$, les fonctions en jeu étant de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \cos(1) + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   Or, $\dfrac{\cos(x)}{x^2} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, donc par comparaison à une intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$, $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$.

- On en déduit que $\boxed{\int_0^{+\infty} frac\sin(t)t\ \mathrm{d}t \text{ est convergente}}$.

2. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\ \mathrm{d}t$.
   - Pour commencer, remarquons que $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \underset{0}{\sim} \dfrac{(2n+1)t}{t} = 2n+1$. Ainsi, cette fonction admet une limite en 0, et l'intégrale est donc convergente car faussement généralisée.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si on n'a pas trop d'idée, on peut partir de $\sin((2n+1)t)$, et utiliser les formules d'addition pour se ramener à $sin(2nt)$ et $\cos(2nt)$, puis recommencer. Beaucoup de $\sin(t)$ se simplifient avec celui au dénominateur, et on se retrouver à intégrer des produits de cos ou sin, qu'on transforme d'abord en somme. Tous ces termes s'annulent, et il ne reste à la fin qu'un terme $\frac{\cos^2(t)\sin((2n-1)t)}{\sin(t)}$. En transformant $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$, on se retrouver avec encore un produit de sin d'un côté, et I_{n-1} de l'autre.
   - Voilà, c'est un peu technique, et je ne mets pas les détails. On peut contourner cet argument technique en remarquant qu'en fait, on peut directement former la différence $I_n - I_{n-1}$, qui se simplifie bien :
   $$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t)}{\sin(t)}\ \mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2nt)\sin(t)}{\sin(t)}\ \mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\Big[\sin(2nt)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0. \end{aligned}$$
   Ainsi, $I_n = I_{n-1}$, et donc la suite (I_n) est constante.
   - Or,
   $$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$
   On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{I_n = \frac{\pi}{2}}$. En utilisant une formule de trigonométrie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n-1} = 0$.
   - En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (Lemme de Lebesgue) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions en jeu étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, on peut faire une IPP :
   $$J_n = \int_a^b f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{n}\Big[f(t)\cos(t)\Big]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(t)\ \mathrm{d}t.$$
   Or, la quantité entre crochet est constante, donc en divisant par n, cela tend vers 0.
   De plus f' est continue sur l'intervalle fermé borne $[a, b]$, donc elle est bornée (théorème de la borne atteinte). Soit M un majorant de $|f|$. On a alors
   $$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)| \cdot |\cos(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b M\ \mathrm{d}t = \frac{M(b-a)}{n} \longrightarrow 0.$$
   D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\cos(t)\ \mathrm{d}t = 0,$$
   puis que
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)\ \mathrm{d}t = 0}.$$

4. Soit f l'application définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$.
   - Pour commencer,
   $$f(t) = \frac{\sin(t) - t}{t\sin(t)} = \frac{-\frac{t^3}{6} + o(t^3)}{t^2 + o(t^2)} = -\frac{t}{6(1+o(1))} = -\frac{t}{6}(1+o(1)) = -\frac{t}{6} + o(t).$$
   Ainsi, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$, donc f se prolonge par continuité en posant $f(0) = 0$. L'existence de ce DL_1 assure la dérivabilite de f, et donne la valeur de la dérivée : $f'(0) = -\frac{1}{6}$.

- Il reste à étudier le caractère $\mathcal{C}^1$. Il est évident sut $]0, \frac{\pi}{2}]$, d'après les règles générales. Il reste à étudier la continuité de la dérivée en 0. Pour cela, on dérive f :

$$\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}], \quad f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{t^2\cos^2(t) - \sin^2(t)}{t^2\sin^2(t)}.$$

Or,

$$\begin{aligned} t^2\cos^2(t) - \sin^2(t) &= t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^2 - t^2\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)^2 \\ &= t^2\left(1 - t^2 - 1 + \frac{t^2}{3} + o(t^2)\right) = -\frac{t^4}{6} + o(t^4) \underset{0}{\sim} -\frac{t^4}{6}. \end{aligned}$$

De plus, $t^2\sin(t^2) \underset{0}{\sim} t^4$, donc

$$f'(t) \underset{0}{\sim} \frac{-t^4/6}{t^4} = -\frac{1}{6}.$$

On obtient bien la limite attendue :

$$\lim_{t\to 0} f'(t) = -\frac{1}{6} = f'(0).$$

- On peut donc maintenant conclure que $\boxed{f \text{ (la fonction prolongée) est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}]}$.

5. - La question précédente permet d'appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue avec la fonction f :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t} - \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} \, \mathrm{d}t \longrightarrow 0.$$

La suite extraite des rangs impairs vérifie alors également cette égalité, et par conséquent, en séparant l'intégrale en 2 (ce qui est possible, puisque les intégrales sont toutes convergentes) :

$$I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t} \, \mathrm{d}t \longrightarrow 0.$$

D'après la question 2, on en déduit alors que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t} \, \mathrm{d}t \longrightarrow \frac{\pi}{2}.$$

- On fait maintenant le changement de variable $x = nt$ dans cette intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t} = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{n\sin(x)}{x}\frac{\mathrm{d}x}{n} = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on trouve donc

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}}.$$

Partie II – Étude d'intégrales du type $\int_0^{+\infty} \sin(t)f(t) \, \mathrm{d}t$

1. (a) La fonction f' est continue sur $[0, +\infty[$, car f est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus

$$\int_0^x f'(t) \, \mathrm{d}t = f(x) - f(0) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -f(0).$$

On en déduit que $\boxed{\int_0^{+\infty} f'(t) \, \mathrm{d}t \text{ est convergente}}$.

(b) - La fonction $t \mapsto \sin(t)f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  - Comme $\cos(t)f(t) \longrightarrow 0$, le théorème d'IPP assure que l'intégrale de f est de même nature que $\int_0^{+\infty} \cos(t)f'(t) \, \mathrm{d}t$.

- Or, pour tout $t \in [0, +\infty[$, puisque $f' \leqslant 0$,

$$|\cos(t)f'(t)| = |\cos(t)| \cdot |f'(t)| \leqslant |f'(t)| = -f'(t),$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (-f'(t))\ \mathrm{d}t$ étant convergente d'après la question précédente, on déduit du théorème de comparaison que $t \mapsto \cos(t)f'(t)$ est inétégrable en $+\infty$, donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)f'(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.

- L'IPP initiale nous permet donc de conclure que $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)f(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge}}$.

2. (a)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrale $\displaystyle\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t$ n'est pas généralisée. On y effectue le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ donné par $u = t - \pi$. on obtient :

$$\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |\sin(t)|f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(u+\pi)|f(u+\pi)\ \mathrm{d}u = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(u)|f(u+\pi)\ \mathrm{d}u,$$

puisque $u \mapsto |\sin u|$ est π-périodique. Or, pour tout $u \in [n\pi, (n+1)\pi]$, du fait de la décroissance de f, on a :

$$|\sin(u)|f(u+\pi) \leqslant |\sin(u)|f(u),$$

et donc, par la propriété de croissance de l'intégrale,

$$\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(u)|f(u+\pi)\ \mathrm{d}u \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(u)|f(u)\ \mathrm{d}u.$$

La variable d'intégration étant muette, on obtient bien l'inégalité :

$$\boxed{\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f étant décroissante et positive, pour tout $t \in [n\pi, (n+1)\pi]$,

$$0 \leqslant |\sin t|f(t) \leqslant |\sin t|f(n) \leqslant f(n).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(n) = \pi f(n).$$

Puisque f est de limite nulle en $+\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \pi f(n) = 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, la suite $\displaystyle\left(\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$, admet une limite et :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t = 0}.$$

- La fonction f étant positive, et la fonction sin étant de signe constant sur tout intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$, positif si n est pair, et négatif si n est impair, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t = (-1)^n u_n$$

où on a posé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t$. Alors, (v_n) est décroissante de limite nulle. La série de terme général $(-1)^n v_n$ est donc une série alternée. On peut donc conclure, d'après le critère spécial de convergence des séries alternées, que $\boxed{\text{la série de terme général } \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge.}}$

(b) De la question précéédente, on déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$, donc, en utilisant la relation de Chasles, que $\displaystyle\int_0^{n\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t$ tend vers un certain réel I lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On écrit alors

$$\int_0^x \sin t f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\lfloor \frac{x}{\pi}\rfloor\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{\lfloor \frac{x}{\pi}\rfloor\pi}^x \sin t f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Or,

$$\left|\int_{\lfloor \frac{x}{\pi}\rfloor\pi}^x \sin t f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{\lfloor \frac{x}{\pi}\rfloor\pi}^x |\sin t f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant \int_{\lfloor \frac{x}{\pi}\rfloor\pi}^{(\lfloor \frac{x}{\pi}\rfloor+1)\pi} |\sin t f(t)|\ \mathrm{d}t = v_{\lfloor \frac{x}{\pi}\rfloor} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'après les calculs faits dans la question précédente. Par ailleurs, ce qui précède montre aussi que, par composition des limites,

$$\int_{\lfloor \frac{x}{\pi}\rfloor\pi}^x \sin t f(t)\ \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} I,$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \sin t f(t)\ \mathrm{d}t = I.$$

On peut donc conclure que l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_0^x \sin t f(t)\ \mathrm{d}t \text{ est convergente}}$.

3. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, par décroissance de f :

$$\forall t \in [(n-1)\pi, n\pi],\quad f(t) \geqslant f(n\pi) \qquad \text{donc:} \qquad |\sin t|f(t) \geqslant |\sin t|f(n\pi).$$

Par conséquent,

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant f(n\pi)\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t|\ \mathrm{d}t = f(n\pi)\left|\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \sin t\ \mathrm{d}t\right|,$$

car sin est de signe constant sur $[(n-1)\pi, n\pi]$. Ainsi,

$$\boxed{\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant f(n\pi)|\cos((n-1)\pi) - \cos(n\pi)| = 2f(n\pi)}.$$

• Or, la fonction f étant décroissante positive, continue, on peut faire une comparaison série intégrale : la série $\sum f(n\pi)$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(\pi t)\ \mathrm{d}t$, donc (par changement de variable) que $\int_0^{+\infty} f(u)\ \mathrm{d}u$. Cette dernière étant divergente, on en conclut que $\sum f(n\pi)$ diverge.

• Du premier point, et de la positivité des termes, on déduit alors que

$$\int_0^{n\pi} |\sin t|f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(n\pi) \longrightarrow +\infty,$$

ce qui $\boxed{\text{empêche la convergence de } \displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(t)|f(t)\ \mathrm{d}t \text{ : elle diverge.}}$

4. (a) • On peut, sans perte de généralité (il suffit de remplacer f par $-f$), supposer que la limite ℓ de f, est strictement positive. Soit alors $0 < \delta < \ell$. Alors, on dispose de x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $f(x) \geqslant \delta$ (valide également si $\ell = +\infty$.

• Soit n_0 tel que $n_0\pi > x_0$. Comme plus haut, on peut alors minorer, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t\right| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| \cdot |f(t)|\ \mathrm{d}t \geqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| \cdot \delta\ \mathrm{d}t \geqslant 2\delta.$$

Par conséquent, $\boxed{\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t \text{ ne tend pas vers } 0}$.

(b) Si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t$ converge (vers I), alors

$$\lim_{n+\to+\infty} \int_0^{(n+1)\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n+\to+\infty} \int_0^{n\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t = I,$$

et en faisant la différence, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t = 0,$$

qui contredit la question précédente.

Ainsi, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t f(t)\ \mathrm{d}t \text{ diverge.}}$

5. (a) Vous remarquerez que la borne inférieure est ici égale à 1 (pour éviter un éventuel problème d'intégrabilité en 0), mais cela ne modifie en rien les critères trouvés précédemment.

- $\boxed{\text{Si } \alpha \leqslant 0}$, alors $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ admet en $+\infty$ une limite égale à 1 (si $\alpha = 0$) ou $+\infty$ (dans les autres cas). Ainsi, d'après la question précédente, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t \text{ diverge.}}$
- $\boxed{\text{Si } 0 < \alpha \leqslant 1}$, alors, d'après II-1(b), la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, décroissante et de limite nulle, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ est convergente. Mais, puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ est divergente (intégrale de Riemann de paramètre $\alpha < 1$), on déduit de la question II-3(c) qu'elle n'est pas absolument convergente.
  Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t \text{ est semi-convergente}}$.
- $\boxed{\text{Si } \alpha > 1}$, alors la comparaison
$$\forall x \geqslant 1,\ \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{x^\alpha},$$
  la positivité des fonctions et la convergence des séries de Riemann de paramètre $\alpha > 1$ assurent $\boxed{\text{la convergence absolue de } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t}$.

(b)
- Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \frac{\sin(t^\beta)}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Ainsi, la seule impropriété est en $+\infty$.
- Le changement de variables $x = t^\beta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, strictement croissant, bijectif de $[1, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$ (car $\beta > 0$), et $t = x^{\frac{1}{\beta}}$, donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta} x^{\frac{1}{\beta}-1}\ \mathrm{d}x$.
  Ainsi, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\beta)}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \cdot \frac{1}{\beta} x^{\frac{1}{\beta}-1}\ \mathrm{d}x$ sont de même nature (la convergence absolue et la semi-convergence étant préservée, puisqu'on pourrait faire le même changement de variable sur l'intégrale des valeurs absolues).
  Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\beta)}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{\alpha+\beta-1}{\beta}}}\ \mathrm{d}x$.
  D'après la question précédente, elle est
  - $*$ divergente si $\frac{\alpha+\beta-1}{\beta} \leqslant 0$ *i.e.* si $\alpha + \beta \leqslant 1$
  - $*$ semi-convergente si $\frac{\alpha+\beta-1}{\beta} \in]0, 1]$, *i.e.* si $\alpha + \beta > 1$ et $\alpha \leqslant 1$
  - $*$ absolument convergente si $\frac{\alpha+\beta-1}{\beta} > 1$ si $\frac{\alpha+\beta-1}{\beta} > 1$, *i.e.* si $a > 1$ (ce qu'on retrouve facilement par un argument direct).

6. (a) Pour tout x de $[1, +\infty[$,

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos(2x)}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos(2x)}{x}\right)$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$ diverge, et on montre exactement comme en I-1, par IPP, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\ \mathrm{d}x$ converge.

Par conséquent, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} \text{ diverge}}$

(b) On a ici, pour tout $t \in [1,+\infty[$,
$$\sin t f(t) = \frac{\sin^2 t}{t} + \frac{\sin t}{t}.$$
Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}$ diverge, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ converge. Donc leur somme est divergente.

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin t f(t)\, \mathrm{d}t \text{ diverge.}}$

La fonction f est ici de classe $\mathcal{C}^1$, de limite nulle, mais pas décroissante (elle est toujours positive, et s'annule une infinité de fois, elle oscille entre 0 et des valeurs positives de plus en plus proches de 0).

Par conséquent, la décroissance de f est une hypothèse indispensable du résultat de la question II-2.

Partie III – Étude d'intégrales du type $\displaystyle\int_1^{+\infty} s(t)f(t)\, \mathrm{d}t$ où s est périodique

1. (a) La fonction s est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une primitive S. Soit S une primitive quelconque.

Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{T+x} s(t)\, \mathrm{d}t$. D'après un théorème du cours (dérivation des intégrales dépendant de leurs bornes), g est de classe $\mathcal{C}^1$, et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = s(T+x) - s(x) = 0,$$
puisque s est périodique. Ainsi, g est constante : l'intégrale d'une fonction périodique sur une période ne dépend pas de la période choisie.

Soit alors $x \in \mathbb{R}$. On a donc :
$$S(T+x) - S(T) = \int_x^{T+x} s(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^T s(t)\, \mathrm{d}t = 0 \qquad \text{donc:} \qquad S(T+x) = S(x).$$
Ainsi, $\boxed{S \text{ est } T\text{-périodique}}$.

(b)
- Puisque de plus, S est continue, elle est bornée sur l'intervalle fermé borné $[0,T]$, donc, par T-périodicité, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi, Sf est de limite nulle en $+\infty$, et par conséquent, le théorème d'IPP assure que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} s(x)f(x)\, \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} S(x)f'(x)$ sont de même nature.
- Soit M un majorant de $|S|$. Alors
$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad |S(x)f'(x)| \leqslant M|f'(x)| = -Mf'(x),$$
puisque $f' \leqslant 0$.
- Les hypothèses sur f étant similaires à celles de II-1, un argument donné lors de cette question montre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f'(x)\, \mathrm{d}x$ converge. Ainsi, par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} |S(x)f'(x)|\, \mathrm{d}x$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} S(x)f'(x)\, \mathrm{d}x$ converge absolument, donc converge.
- Et finalement, $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} s(x)f(x)\, \mathrm{d}x \text{ est convergente}}$.

2. (a) Posons $m = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s(t)\, \mathrm{d}t$. Alors
$$\int_0^T m\, \mathrm{d}t = \int_0^T s(t)\, \mathrm{d}t \qquad \text{donc:} \qquad \boxed{\int_0^T (s(t)-m)\, \mathrm{d}t = 0}$$
Par ailleurs, puisque $\displaystyle\int_0^T s(t)\, \mathrm{d}t \neq 0$, $\boxed{m \neq 0}$.

(b)
- La fonction $t \mapsto s(t) - m$ est T-périodique, d'intégrale nulle sur une période, et f est de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante de limite nulle. Ainsi, on est dans les conditions d'application de la question III-1, et on peut donc affirmer que $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} (s(t)-m)f(t)\, \mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$

- Par ailleurs, m étant non nul, et $\int_1^{+\infty} f(t)$ étant divergente, $\int_1^{+\infty} mf(t)\ \mathrm{d}t$ diverge.

  On en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} (s(t)-m)f(t)+mf(t)\ \mathrm{d}t$ diverge, donc $\boxed{\int_1^{+\infty} s(t)f(t)\ \mathrm{d}t \text{ est divergente.}}$

3. Exemple.

   (a) - Si $\alpha > 1$, on a convergence absolue, par comparaison directe à une intégrale de Riemann de paramètre α
   - Si $\alpha \in]0,1]$: la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, décroissante de limite nulle et :
     * si n est impair, $x \mapsto \sin^n x$ est 2π-périodique, et impaire, et

       $$\int_0^{2\pi} \sin^n x\ \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n x\ \mathrm{d}x = 0,$$

       par imparité. Ainsi, on est dans les conditions d'application du III-1 : l'intégrale est convergente.
     * Si n est pair, $x \mapsto \sin^n x$ est π-périodique, continue et positive, non identiquement nulle. Ainsi, d'après la propriété de stricte positivité de l'intégrale,

       $$\int_0^{\pi} \sin^n x\ \mathrm{d}x > 0.$$

       On est donc dans les conditions d'application du III-2 : l'intégrale est divergente.

   (b) Soit $\alpha \in]0,\frac{1}{2}]$. Soit $g : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^\alpha + \sin x}$ définie sur $[1,+\infty[$. Pour tout $x \geqslant 1$,

   $$g(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha} \cdot \frac{1}{1+\frac{\sin x}{x^\alpha}}.$$

   Soit n un entier tel que $(2n+1)\alpha > 1$. Alors :

   $$g(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\left(\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)^k + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{2n\alpha}}\right)\right) = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\left(\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)^{k+1} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^{(2n+1)\alpha}}\right).$$

   Il existe donc une fonction h en $\underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^{(2n+1)\alpha}}\right)$ telle que

   $$g(x) = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\sin^{2\ell} x}{x^{2\alpha\ell}} - \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\sin^{2\ell-1} x}{x^{(2\ell-1)\alpha}} + h(x).$$

   - Or,

     $$\int_1^{+\infty}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\sin^{2\ell-1} x}{x^{(2\ell-1)\alpha}}\ \mathrm{d}x$$

     converge en tant que sommes d'intégrales convergentes, d'après la question précédente, les puissances du sin étant toute paires.
   - $\int_1^{+\infty} h(x)\ \mathrm{d}x$ converge, absolument, par comparaison de la fonction positive $|h|$ à $\frac{1}{x^{(2n+1)\alpha}} \geqslant 0$, cette dernière fonction étant d'intégrale convergente, puisque $(2n+1)\alpha$ est supposé supérieur strictement à 1.
   - Enfin, $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}\frac{\sin^{2\ell} x}{x^{2\alpha\ell}}$ étant une somme de fonctions positives, la divergence de l'intégrale de l'une d'entre elle suffit à assurer la divergence de la somme (il ne peut pas y avoir compensation des divergences : elles s'ajoutent ici). Or, le premier terme de cette somme est $\dfrac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}$. Comme $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, $2\alpha \leqslant 1$, donc, d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}}\ \mathrm{d}x$ diverge. Ainsi,

     $$\int_1^{+\infty}\sum_{\ell=0}^{n}\frac{\sin^{2\ell} x}{x^{2\alpha\ell}}\ \mathrm{d}x$$

     diverge.

   Par conséquent, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\ \mathrm{d}x$ est la somme de deux intégrales convergentes et d'une intégrale divergente.

   Ainsi, si $\alpha \in]0,\frac{1}{2}]$, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha+\sin x}\ \mathrm{d}x \text{ est divergente.}}$