

DM n° 4 : Intégrales généralisées

Corrigé du problème – (Mines PC 2017 - Première répétition)

Partie I – Exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k x^k}{k!} \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

- La série définissant $R_n(x)$ est le reste d'une série exponentielle de paramètre nx . Elle est donc convergente. Pour le redémontrer, on peut utiliser la règle de d'Alembert : en notant, pour x et n fixés, $u_n = \frac{n^k x^k}{k!}$, on forme le quotient

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{nx}{k+1} \longrightarrow 0 < 1.$$

Ainsi, $\sum u_n$ converge absolument, donc converge. On en déduit que $R_n(x)$ existe

- Lorsqu'on forme la somme, on retrouve la somme exponentielle complète :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}.$$

- La fonction $t \mapsto e^{nt}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, de dérivée k -ième égale à $t \mapsto n^k e^{nt}$. On peut donc lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à tout ordre. À l'ordre n , entre 0 et x , on obtient, pour $x > 0$:

$$e^{nx} = \sum_{k=0}^n \frac{n^k x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} n^{n+1} e^{nt} dt = T_n(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} n^{n+1} e^{nt} dt.$$

Puisque $e^{nx} - T_n(x) = R_n(x)$, on obtient, par le changement de variables $u = x - t$,

$$R_n(x) = - \int_x^0 \frac{u^n}{n!} n^{n+1} e^{n(x-u)} du, \quad \text{donc:} \quad R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du.$$

- Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!} y^n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on calcule le quotient :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \frac{n!}{(n+1)!} y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} y.$$

Or,

$$\ln \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right) = (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n+1}{n} \underset{+\infty}{\sim} 1.$$

Donc, par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = ey$.

- Si $y < e^{-1}$, on peut trouver a tel que $ey < a < 1$, et un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < a.$$

Comme (a_n) est positive, on en déduit que pour tout $n \geq n_0$, par télescopage multiplicatif,

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} < a^{n-n_0} \quad \text{puis:} \quad 0 < a_n < a_{n_0} a^{n-n_0}.$$

Puisque $0 < a < 1$, le majorant tend vers 0, donc par théorème d'encadrement, $\boxed{a_n \longrightarrow 0}$

- Je ne sais pas exactement s'il était attendu de refaire tout cela. En tout cas, en MP, le critère de d'Alembert étant au programme (mais pas la comparaison directe pour la limite de la suite), on peut contourner cet argument en restant dans le programme, en déduisant du calcul de la limite du quotient que la série de terme général a_n converge, donc que le terme général a_n tend vers 0. Mais c'est un détour un peu bizarre, puisque montrer le critère de d'Alembert pour les séries passe par la majoration de a_n par un terme géométrique.
4. • On étudie $g : u \mapsto ue^{-u}$ sur $[0, 1]$. La fonction g est dérivable sur cet intervalle, et

$$\forall u \in [0, 1], \quad g'(u) = e^{-u}(1-u) \geq 0.$$

Ainsi, g est croissante, et $g(0) = 0$ et $g(1) = e^{-1}$.

- De plus, g' ne s'annule qu'en 1, donc g est strictement croissante sur $[0, 1]$. On en déduit que pour tout $x \in]0, 1[$, $g(x) < e^{-1}$, et que g admet sur $[0, x]$ son maximum en x , de valeur $\boxed{M = g(x) < e^{-1} < 1}$.
- Ainsi, sur l'intervalle $[0, x]$, la suite de fonctions (g^n) , vérifie :
 - * les g^n sont continues par morceaux
 - * g^n converge simplement vers la fonction nulle, elle-même c.p.m.
 - * Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|g^n| \leq 1$, intégrable sur $[0, x]$.

Ainsi, d'après le TCD, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x (ue^{-u}) du = 0}$.

- Puisque d'autre part, $n^{n+1} = o(n!)$, on déduit de la question 2 que

$$\boxed{R_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{nx})}.$$

- Il en résulte que

$$T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) = e^{nx} + o(e^{nx}), \quad \text{donc:} \quad \boxed{T_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{nx}}.$$

5. On l'a vu en cours. On peut le redémontrer, en redémontrant d'abord la relation usuelle de la fonction Γ , ou alors, comme c'était probablement attendu ici, en faisant une récurrence sur n .

- Pour éviter les justifications intermédiaires, on justifie d'emblée la convergence des intégrales. Les fonctions $t \mapsto t^n e^{-t}$ sont continues $[0, +\infty[$, et intégrables en $+\infty$ puisque $t^n e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.

Ainsi, les intégrales sont convergentes.

- Pour $n = 0$, $\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt.$$

La convergence des intégrales et l'existence de la limite du crochet aux bornes justifient l'intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} dt = \left[-t^{n+1} e^{-t}\right]_0^{+\infty} + (n+1) \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = (n+1) \cdot n! = (n+1)!.$$

- D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt}$

6. Soit $n \geq 1$. On effectue le changement de variable $t = nu$, $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même :

$$n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} n^n u^n e^{-nu} du = n^{n+1} \int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n du.$$

Ainsi,

$$\frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n du - \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du = 1 - \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du.$$

En remplaçant cela dans l'expression obtenue en question 2, on obtient :

$$T_n(x) = e^{nx} \left(1 - \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n du \right) = \boxed{e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du}.$$

7. Soit $x > 1$. L'étude de g faite dans la question 4, qu'on peut étendre à $\mathbb{R}_+$ tout entier, montre que g est décroissante sur $[1, +\infty[$, et positive. Ainsi, pour tout $u \geq x$, et par croissance de la fonction $y \mapsto y^n$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$(ue^{-u})^{n-1} \leq (xe^{-x})^{n-1}.$$

En multipliant par $ue^{-u} \geq 0$, il vient donc

$$\boxed{(ue^{-u})^n \leq (ue^{-u})(xe^{-x})^{n-1}}.$$

On en déduit que

$$0 \leq \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du \leq \frac{n^{n+1}(xe^{-x})^{n-1}}{n!} \int_x^{+\infty} ue^{-u} du.$$

Or, par croissances comparées, $n^{n+1}(xe^{-x})^{n-1} = o(n!)$, et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n+1}(xe^{-x})^{n-1}}{n!} \int_x^{+\infty} ue^{-u} du = 0.$$

D'après le théorème d'encadrement, on obtient En

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n du,$$

et on en déduit, par l'expression de la question 6, que $\boxed{T_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{nx})}$.

Partie II – Méthode de Laplace

On admet la formule de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

H1 : $f(0) = 1$

H2 : $f''(0) = -1$

H3 : Pour tout $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, $0 < f(x) < 1$

H4 : les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.

Pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(f(x)).$$

8. • La fonction f est positive sur $] -1, 1[$, et vérifie $f(0) = 1$ et $f(x) \leq 1$ pour $x \in] -1, 1[$. De plus, elle est dérivable en 0, par hypothèse. On a donc

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \geq 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 0.$$

On en déduit que $\boxed{f'(0) = 0}$.

- La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$, d'après la formule de Taylor-Young,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 = o(x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x).$$

On en déduit que

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{x^2} \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = -\frac{1}{x^2} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = \frac{1}{2} + o(1).$$

- Ainsi, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \frac{1}{2}}$.

- La fonction f étant continue, elle admet une limite $f(-1) \in [0, 1[$ en -1 , et une limite $f(1) \in [0, 1[$ en 1 . Par composition, φ admet aussi une limite en -1 et en 1 , dans $]0, +\infty[$. En effet, cette limite peut être infinie sur $f(\pm 1) = 0$, mais, sinon, elle reste positive, car $f(\pm 1) \in]0, 1[$, mais ne peut pas être nulle car $f(\pm 1) \neq 1$.
- Notons ℓ_1 et ℓ_2 les deux limites en -1 et en 1 . Soit $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \varepsilon < \min(\ell_1, \ell_2)$. Par définition de la limite il existe donc $\eta > 0$ (qu'on peut choisir inférieur à $\frac{1}{2}$, car si un η convient, tous les η plus petits aussi), tel que

$$\forall x \in]-1, -1 + \eta] \cup [1 - \eta, 1[, \quad \varphi(x) > \varepsilon.$$

De plus, φ est continue sur l'intervalle fermé borné $[-1 + \eta, 1 - \eta]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Son minimum m est notamment atteint en un point $x_0 \in [-1 + \eta, 1 - \eta]$, et comme $\varphi(x_0) > 0$ d'après l'hypothèse H3, on en déduit que $m > 0$.

On pose alors $a = \min(\varepsilon, m)$. On a bien, $\boxed{a > 0, \text{ et } a \text{ minore } \varphi \text{ sur }]-1, 1[}$.

- Remarquez que si $f(-1)$ et $f(1)$ sont différents de 0, les limites ℓ_1 et ℓ_2 sont finies et on aurait pu directement prolonger φ par continuité et utiliser le théorème des bornes atteintes sur l'intervalle $[-1, 1]$. C'est sans doute dans cette optique que l'indication a été donnée. Mais notre démonstration permet de gérer tous les cas en même temps.
- Par croissance du logarithme, on a alors, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\boxed{f(x) \leq e^{-\frac{ax^2}{2}}}.$$

Par continuité, en passant à la limite dans cette inégalité lorsque $x \rightarrow -1$ et $x \rightarrow 1$, l'inégalité reste valide sur $[-1, 1]$.

Pour tout n entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) \right)^n & \text{si } u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction g_n est continue sur $] -\infty, -\sqrt{n}[$ et sur $]\sqrt{n}, +\infty[$, car elle coïncide sur ces ouverts avec la fonction nulle qui est continue.

De plus, g_n admet une limite finie (nulle) à gauche en $-\sqrt{n}$ et de même à droite en $\sqrt{n}$.

Enfin, g_n est aussi continue sur l'ouvert $] -\sqrt{n}, \sqrt{n}[$ par composition de fonctions continues. Enfin, par composition des limites, et par continuité de f sur $[-1, 1]$,

$$\lim_{u \rightarrow -\sqrt{n}^+} g_n(u) = f(-1)^n \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow \sqrt{n}^+} g_n(u) = f(1)^n,$$

ces limites étant finies. On en déduit que $\boxed{g_n \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq x^2$, $x \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, et donc

$$g_n(x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{n \ln\left(f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)} = e^{-x^2 \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}.$$

On remarque qu'avec le prolongement par continuité de φ , la dernière égalité est valide aussi pour $x = 0$. Ainsi, par passage à la limite, par continuité de φ et de l'exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = e^{-x^2 \varphi(0)} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Oh, oh! On voit poindre l'intégrale de Gauss!

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (g_n) \text{ converge simplement vers } g : u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}}$.

11. On utilise bien sûr le TCD :

- Les fonctions g_n sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, ainsi que la fonction g ;
- g_n converge simplement vers g
- Il reste à vérifier l'hypothèse de domination. Pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:
 - * si $u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$,

$$|g_n(u)| = f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n \leq (e^{-\frac{au^2}{2}})^n = e^{-\frac{au^2}{2}},$$

d'après la question 9,

- * si $u \notin [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$, on a trivialement

$$|g_n(u)| = 0 \leq e^{-\frac{au^2}{2}}.$$

Ainsi, la suite g_n est dominée par $u \mapsto e^{-\frac{au^2}{2}}$ qui est clairement intégrable sur $\mathbb{R}$ (par comparaison par exemple à des intégrales de Riemann en $-\infty$ et en $+\infty$).

Les hypothèses de TCD étant toutes vérifiées, on peut donc écrire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(u) \, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}},$$

et donc, d'après le résultat admis sur l'intégrale de Gauss,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \, du = \sqrt{2\pi}.$$

12. Il ne reste plus qu'à faire un changement de variable $x = \frac{u}{\sqrt{n}}$, pour obtenir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \int_{-1}^1 (f(x))^n \, dx = \sqrt{2\pi},$$

et donc finalement :

$$\int_{-1}^1 (f(x))^n \, dx \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

On en déduit de la même manière que

$$\int_0^1 (f(x))^n \, dx \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \quad (1)$$

Partie III – Formule de Stirling

12. • Soit $n \geq 1$, on remarque pour commencer que I_n est bien définie car intégrale sur un segment d'une fonction continue. De même, J_n est bien définie, car intégrale d'une fonction continue sur $[1, +\infty[$, et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$
- Par ailleurs, par la relation de Chasles, suivie de changements de variable affines,

$$I_n + J_n = \int_{-1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} \, dx = \int_0^{+\infty} y^n e^{-n(y-1)} \, dy = e^n \int_0^{+\infty} y^n e^{-ny} \, dy = e^n n^{-n} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \frac{dt}{n},$$

et donc

$$I_n + J_n = e^n n^{-(n+1)} \Gamma(n+1) = e^n n^{-(n+1)} n!,$$

d'après la question 5. Il en résulte que

$$n! = n^{n+1} e^{-n} (I_n + J_n).$$

13. Soit $g : x \mapsto 2^x = e^{x \ln(2)}$. La fonction g est 2 fois dérivable, et

$$\forall x \geq 1, \quad g''(x) = (\ln 2)^2 2^x \geq 0$$

Ainsi, g est convexe, et sa tangente en 1 est la droite d'équation $y = 2(\ln(2))(x-1) + 2$. Puisque $2\ln(2) > 1$, on obtient donc, par comparaison de la courbe de g et de sa tangente en 1 :

$$\forall x \geq 1, \quad 2^x \geq 2\ln(2)(x-1) + 2 \geq (x-1) + 2 \quad \text{donc:} \quad 2^x \geq x + 1.$$

Ainsi,

$$J_n = \int_1^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} dx \leq \int_1^{+\infty} 2^{nx} e^{-nx} dx = \int_1^{+\infty} e^{-nx(1-\ln(2))} dx = -\frac{1}{n(1-\ln(2))} \left[e^{-nx(1-\ln(2))} \right]_1^{+\infty},$$

et finalement,

$$J_n \leq \frac{e^{-(1-\ln(2))}}{n(\ln(2)-1)}.$$

Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $x+1 \leq 2^x$. En déduire une majoration de J_n .

14. Soit $f : x \mapsto (x+1)e^{-x}$. On a :

H1. $f(0) = 1$;

H2. Pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$f'(x) = (1 - (x+1))e^{-x} = -xe^{-x}, \quad \text{puis:} \quad f''(x) = (-1+x)e^{-x},$$

donc $f''(0) = -1$;

H3. La fonction f est clairement strictement positive sur $] -1, 1[$. De plus, l'expression de la dérivée montre que f est strictement croissante sur $] -1, 0[$ et strictement décroissante sur $] 0, 1[$, donc f admet un maximum strict en 0, égal à $f(0) = 1$. On en déduit que pour tout $x \in] -1, 1[\setminus \{0\}$, $0 < f(x) < 1$.

H4. $f(-1) = 0 \in [0, 1[$, $f(1) = 2e^{-1} \in [0, 1[$.

Ainsi, les hypothèses H1 à H4 sont satisfaites pour f , et on peut appliquer la méthode de Laplace :

$$I_n = \int_{-1}^1 f(x)^n dx \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

15. D'après la question 13, $J_n = O\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = o(I_n)$. Ainsi,

$$I_n + J_n \underset{+\infty}{\sim} I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}},$$

et on déduit donc de la question 12 la formule de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Partie IV – Formule de Bernstein

16. D'après la question 2,

$$R_n(1) = e^n \cdot \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n e^{-nu} dt.$$

Le changement de variable $t = 1 - u$ amène

$$R_n(1) = -e^n \cdot \frac{n^{n+1}}{n!} \int_1^0 (1-t)^n e^{-n(1-t)} dt = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} dt$$

17. • On pose $g : t \mapsto (1-t)e^t$ sur $[0, 1]$. On constate que $g(t) = f(-t)$, où f est la fonction étudiée dans la partie précédente. Cela nous assure facilement le transfert des hypothèses H1 à H4 à la fonction g . On peut donc à nouveau utiliser la méthode de Laplace, mais cette fois juste sur l'intervalle $[0, 1]$ (résultat admis après la question 11).

Ainsi,

$$R_n(1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{n+1}}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

On peut simplifier un peu cet équivalent à l'aide de la formule de Stirling :

$$R_n(1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{donc:} \quad R_n(1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^n.$$

- Puisque $R_n(1) + T_n(1) = e^n$, on en déduit que

$$T_n(1) = e^n - R_n(1) = e^n - \frac{1}{2}e^n + o(e^n) = \frac{1}{2}e^n + o(e^n) \quad \text{donc:} \quad \boxed{T_n(1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^n}.$$

Partie V – Première répétition

18. On donne deux codes possibles. Dans le premier, on teste à chaque fois l'appartenance d'un élément à la liste tronquée des éléments précédents, et on s'arrête dès que ce test est positif (**return** fait sortir de la fonction, donc en particulier de la boucle **for**). Dans le deuxième, on crée un tableau dont la longueur est $n + 1$ (mais la case 0 ne sera pas utilisée), et à chaque fois qu'on rencontre une boule, on l'indique dans la case correspondant à son numéro. Cela permet de se rendre compte facilement si une boule a déjà été rencontrée.

On aurait aussi pu créer l'ensemble des boules déjà rencontrées, et tester l'appartenance à cet ensemble (**set**), ce qui est à peu près équivalent à la création d'un dictionnaire dont les clés sont les numéros de boules.

```
def X(W):
    for k in range(len(W)):
        if W[k] in W[:k]:
            return k+1 # les listes étant numérotés à partir de 0 en Python
                        # alors que les tirages sont numérotés à partir de 0

def Xbis(W):
    L = [0 for k in range(len(W))] # liste dans laquelle on indique les no de boules
                                   # déjà obtenues

    for k in range(len(W)):
        if L[W[k]] > 0:
            return k+1
        else:
            L[W[k]] += 1
```

19. Soit $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$. L'événement $\{(1, 2, \dots, k-1, 1)\}$ est inclus dans $[X = k]$, donc

$$\mathbb{P}(X = k) \geq \mathbb{P}(\{1, 2, \dots, k-1, 1\}) = \mathbb{P}(U_1 = 1, \dots, U_{k-1} = k-1, U_k = 1).$$

Puisque les variables aléatoires U_k sont supposées indépendantes, et suivant une loi uniforme,

$$\mathbb{P}(X = k) \geq \mathbb{P}(U_1 = 1)\mathbb{P}(U_2 = 2) \dots \mathbb{P}(U_{k-1} = k-1)\mathbb{P}(U_k = 1) = \frac{1}{n^k},$$

et donc $\boxed{\mathbb{P}(X = k) > 0}$.

20. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On utilise la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $\{[X > k], [X \leq k]\}$. D'après la question précédente, ces deux événements ne sont pas quasi-impossibles, d'où la validité de la formule. On obtient donc :

$$\mathbb{P}(X > k+1) = \mathbb{P}(X > k+1 \mid |X > k)P(X > k) + \mathbb{P}(X > k+1 \mid |X \leq k)P(X \leq k).$$

Or, $X > k+1$ et $X \leq k$ sont clairement incompatibles, donc $\mathbb{P}(X > k+1 \mid |X \leq k) = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\mathbb{P}(X > k+1) = \mathbb{P}(X > k+1 \mid |X > k)P(X > k)}.$$

21. Si $[X > k]$ est réalisé, on n'a obtenu que des boules de numéros distincts lors des k premiers tirages. Il ne reste donc que $n - k$ boules non tirées, et pour réaliser $[X > k+1]$, il faut et il suffit de tirer une de ces boules. Ainsi,

$$P(X > k+1 \mid X > k) = \frac{n-k}{n}.$$

On en déduit la relation de récurrence suivante :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad P(X > k+1) = \frac{n-k}{n} P(X > k),$$

et puisque $P(X > 0) = 1$,

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad P(X > k+1) = \frac{(n-k)(n-k+1) \cdots n}{n^{k+1}} P(X > 0) = \frac{n!}{(n-(k+1))!} n^{k+1},$$

et donc

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \boxed{P(X > k) = \frac{n!}{n^k (n-k)!}}$$

22. On part de la somme de l'énoncé, en remarquant que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X > k) = \sum_{\ell=k+1}^{n+1} \mathbb{P}(X = \ell),$$

du fait que X ne peut pas prendre une valeur plus grande que $n+1$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=k+1}^{n+1} \mathbb{P}(X = \ell) = \sum_{\ell=1}^{n+1} \sum_{k=0}^{\ell-1} \mathbb{P}(X = \ell) = \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell \mathbb{P}(X = \ell).$$

Par définition de l'espérance, et puisque $X(\Omega) \subset \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on obtient donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X > k) = \mathbb{E}(X)}.$$

23. On peut donc déduire des 2 questions précédentes que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{n^k (n-k)!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^{n-k} k!} = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{n!}{n^n} T_n(1).$$

D'après la question 17, et la formule de Stirling (question 15), il vient donc

$$\mathbb{E}(X) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n} \cdot \frac{1}{2} e^n,$$

et après simplification,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n\pi}{2}}}.$$