

DM n° 4 : Continuité dans un e.v.n.

Corrigé du problème – Théorème d'Ascoli

Partie I – Complétude de F

1. Soit $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Avec $\varepsilon = 1$ dans la définition, on dispose de N tel que pour tout $n, p \geq N$, $\|u_n - u_p\| \leq 1$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \overline{B}(u_N, 1)$. La suite $(u_n)_{n \geq N}$ est donc bornée, et les termes $(u_n)_{n < N}$ étant en nombre fini (donc aussi borné), on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
2. Puisque F est de dimension finie, on peut appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass, nous assurant de l'existence d'une valeur d'adhérence de (u_n) .
3. Soit φ et ψ deux extractrices, et $\varepsilon > 0$. Soit N tel que, pour tout $n, p \geq N$, $\|u_n - u_p\| \leq \varepsilon$. En particulier, puisque φ et ψ sont des extractrices, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$ et $\psi(n) \geq n$, et donc, pour tout $n \geq N$, $\varphi(n) \geq N$ et $\psi(n) \geq N$. On en déduit que pour tout $n \geq N$,

$$\|u_{\varphi(n)} - u_{\psi(n)}\| \leq \varepsilon.$$

On en déduit bien que $u_{\varphi(n)} - u_{\psi(n)} \longrightarrow 0$.

4. On sait qu'il existe une valeur d'adhérence a , et donc une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \longrightarrow a$. Ainsi, d'après la question précédente, pour toute extractrice ψ , $u_{\psi(n)} \longrightarrow a$. C'est vrai en particulier pour $\psi = \text{id}$, donc $u_n \longrightarrow a$.

Partie II – Théorème de Heine pour l'équicontinuité

5. On suppose que A n'est pas uniformément équicontinue. Ainsi,

$$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists f \in A, \quad \exists (x, y) \in K^2, \quad \|y - x\|_E \leq \eta \text{ et } \|f(y) - f(x)\| > \varepsilon.$$

On fixe un tel ε , et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\eta_n = \frac{1}{2^n}$. La proposition ci-dessus nous affirme donc qu'on dispose de $\tilde{f}_n \in A$ et de $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \in K^2$ tels que

$$\|\tilde{y}_n - \tilde{x}_n\| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \|\tilde{f}_n(\tilde{x}_n) - \tilde{f}_n(\tilde{y}_n)\|_F > \varepsilon.$$

6. • Comme K est compact, on peut extraire de $\tilde{x}_n$ une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\tilde{x}_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers $x \in K$.
• On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\tilde{y}_{\varphi(n)} - \tilde{x}_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{2^{\varphi(n)}} \longrightarrow 0,$$

donc, en définissant $y_n = \tilde{y}_{\varphi(n)}$, on a aussi, par théorème d'encadrement, $y_n \longrightarrow x$.

- Par ailleurs, en définissant de même $f_n = \tilde{f}_{\varphi(n)}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\tilde{f}_{\varphi(n)}(\tilde{x}_{\varphi(n)}) - \tilde{f}_{\varphi(n)}(\tilde{y}_{\varphi(n)})\|_F > \varepsilon,$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n(x_n) - f_n(y_n)\|_F > \varepsilon.$$

7. A étant équicontinue en x , on dispose de $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $y \in B(x, \eta) \cap K$,

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors, par inégalité triangulaire, pour tout $(y, z) \in (B(x, \eta) \cap K)^2$,

$$\|f(y) - f(z)\| \leq \|f(y) - f(x)\| + \|f(x) - f(z)\| \leq \varepsilon.$$

Puisque $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow x$, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in B(x, \eta) \cap K$ et $y_n \in B(x, \eta) \cap K$. On en déduit donc que

$$\forall n \geq N, \quad \|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| \leq \varepsilon.$$

Cela est une contradiction flagrante de la question précédente, donc notre hypothèse initiale de notre démonstration par l'absurde est fausse.

On en conclut finalement que A est uniformément équicontinue.

Partie III – Précompacité et séparabilité

8. On raisonne par l'absurde en supposant que pour $\eta > 0$ donné, il n'existe pas une telle famille. On construit alors une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que pour tout $n \neq p$, $\|a_n - a_p\| \geq \eta$. On fait cette construction par récurrence.

- On définit a_0 quelconque dans K . En effet, on peut le faire, car l'hypothèse de notre démonstration par l'absurde implique clairement que K n'est pas vide.
- Supposons $(a_0, \dots, a_n)$ sont construits tels que pour tous p et q distincts dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, $\|a_p - a_q\| \geq \eta$. Puisque $\bigcup_{k=0}^n B(a_k, \eta)$ ne recouvre pas K , par hypothèse, il existe $a_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{k=0}^n B(a_k, \eta)$. En particulier, n'étant dans aucune de ces boules, a_{n+1} vérifie :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \|a_{n+1} - a_k\| \geq \eta.$$

Les autres inégalités sont déjà vérifiées par hypothèse de récurrence

- Ainsi, on a bien construit, par principe de récurrence, une suite $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tous n et p distincts, $\|a_n - a_p\| \geq \eta$.

En particulier, cette suite ne peut pas avoir de valeur d'adhérence, puisque si φ est une extractrice, $\|a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)}\| \geq \eta$, donc $a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)}$ ne tend pas vers 0.

Cela contredit la compacité de K . On en déduit que K est précompact.

9. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un recouvrement fini de K par des boules $B(x_i, \frac{1}{2^n})$, $i \in I_n$. Quitte à enlever quelques unes de ces boules, on peut supposer que toutes les boules rencontrent K . On peut alors trouver un élément y_i dans chaque boule appartenant à K . On définit $D_n = \{y_i, i \in I_n\}$, puis $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$.
- Les D_n sont finis, donc D est au plus dénombrable, comme union dénombrable d'ensembles finis.
 - Montrons que D est dense dans K . Soit $x \in K$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x est dans l'une des boules $B(x_i, \frac{1}{2^n})$ du recouvrement ayant servi à définir D_n . On pose alors $a_n = y_i \in D_n$, l'élément de K de la même boule, sélectionné dans D_n . On a donc $a_n \in D$ et comme x et a_n sont dans une même boule de rayon $\frac{1}{2^n}$, $\|a_n - x\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
 - On en déduit que $a_n \rightarrow x$. Comme (a_n) est une suite d'éléments de $D \subset K$, on en déduit, par caractérisation séquentielle, que D est dense dans K .

Partie IV – Théorème d'Ascoli, sens direct

10. Puisque $\overline{A}$ est compact, il est borné. Or $A \subset \overline{A}$, donc A est aussi borné.

11. On suppose par l'absurde que A n'est pas équicontinue.

- (a) Par hypothèse, il existe $x \in K$ tel que A ne soit pas équicontinue en x . Par négation de la propriété d'équicontinuité, on dispose donc de $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $f \in A$ et $y \in K$ tel que

$$\|y - x\| \leq \eta \quad \text{et} \quad \|f(y) - f(x)\| > \varepsilon.$$

Avec $\eta_n = \frac{1}{2^n}$, on peut donc poser $f_n \in A$ et $x_n \in K$ tel que

$$\|x_n - x\| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad \|f_n(x_n) - f_n(x)\| > \varepsilon.$$

En particulier, la première majoration amène $x_n \rightarrow x$.

- (b) Puisque $\overline{A}$ est compact, et que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\overline{A}$, on peut en extraire une suite $f_{\varphi(n)}$ convergeant vers $f \in \overline{A}$ (au sens de $\|\cdot\|_\infty$). On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x)\| > \varepsilon,$$

et par convergence uniforme de $f_{\varphi(n)}$, on dispose de N tel que pour tout $n \geq N$, $\|f_{\varphi(n)} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$. On en déduit que pour tout $n \geq N$, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \|f(x_{\varphi(n)}) - f(x)\| &\geq \|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x)\| - \|f(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})\| - \|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\| \\ &\geq \|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x)\| - 2\|f - f_{\varphi(n)}\|_\infty \\ &> \varepsilon - 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

On pose alors $y_n = x_{\varphi(n+N)}$. On a bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{x\|f(y_n) - f(x)\| > \frac{\varepsilon}{2}},$$

et, (y_n) étant extraite de (x_n) , $\boxed{y_n \longrightarrow x}$.

- (c) Par définition de l'adhérence, il existe $g \in A$ tel que $\|g - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{8}$. On a alors, par inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|g(y_n) - g(x)\| &\geq \|f(y_n) - f(x)\| - \|g(y_n) - f(y_n)\| - \|g(x) - f(x)\| \\ &\geq \|f(y_n) - f(x)\| - 2\|g - f\|_\infty > \frac{\varepsilon}{2} - 2 \cdot \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

On a donc trouvé une fonction $g \in A$ (en particulier continue), et une suite y_n telle que $y_n \longrightarrow x$ et $g(y_n)$ ne tend pas vers $g(x)$. Cela contredit le critère séquentiel de la continuité de g en x .

Ainsi, on peut conclure que $\boxed{A \text{ est équicontinue}}$.

NB : On aurait pu se passer de la dernière question, la fonction f étant elle aussi continue (l'adhérence de A étant prise dans $\mathcal{C}^0(K, F)$).

Partie V – Théorème d'Ascoli, sens réciproque

13. • Supposons $\overline{A}$ compact. Alors toute suite (f_n) d'éléments de A admet une valeur d'adhérence dans $\overline{A}$, donc dans $\mathcal{C}^0(K, F)$.
 • Réciproquement, supposons que toute suite $(f_n) \in A^\mathbb{N}$ admet une valeur d'adhérence dans $\mathcal{C}^0(K, F)$. Soit $(g_n) \in \overline{A}^\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut donc trouver $f_n \in A$ telle que $\|g_n - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$. On a donc $g_n - f_n \longrightarrow 0$. Par hypothèse, (f_n) admet une valeur d'adhérence f . On dispose donc d'une extractrice telle que $f_{\varphi(n)} \longrightarrow f$. Mais alors, on a également $g_{\varphi(n)} \longrightarrow f$. Ainsi, (g_n) admet une valeur d'adhérence f , et puisque $\overline{A}$ est fermé, $f \in \overline{A}$.

On en déduit que $\boxed{\overline{A} \text{ est compact}}$.

14. Puisque A est bornée, il existe M tel que pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty \leq M$. Ainsi,

$$\forall f \in A, \quad \forall x \in K, \quad \|f(x)\| \leq \|f\|_\infty \leq M.$$

On en déduit que $\boxed{\{f(x) \mid f \in A, x \in K\} \subset \overline{B}(0_F, M) \text{ et est donc borné}}$.

15. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^\mathbb{N}$, et $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K , telle que $D = \{x_p, p \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $\mathbb{K}$, ce qui existe d'après la partie III.
 • La suite $(f_n(x_0))$ est bornée, et F est de dimension finie. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire une suite $(f_{\varphi_0(n)}(x_0))$ convergente.
 • De même, la suite $(f_{\varphi_0(n)}(x_1))$ est bornée dans F de dimension finie, donc on peut en extraire $f_{\varphi_0 \circ \varphi_1(n)}(x_2)$ convergente.
 • En continuant de la sorte, on peut construire une famille (φ_n) d'extractrices telles que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(f_{\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(n)}(x_p))_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente. On définit alors φ par

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \varphi(p) = \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_p(p).$$

Comme $\varphi_{p+1}(p+1) \geq p+1 > p$, on a alors

$$\varphi(p+1) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p(\varphi_{p+1}(p+1)) > \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p(p) = \varphi(p),$$

donc φ est strictement croissante. De plus, par construction,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \varphi(\llbracket p, +\infty \rrbracket) \subset \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p(\llbracket p, +\infty \rrbracket),$$

donc $(f_{phi(n)}(x_p))_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite à partir du rang p de la suite $(f_{\varphi_0 \circ \cdots \circ phi_p(n)}(x_p))_{n \in \mathbb{N}}$ qui est convergente.

On en déduit que $\boxed{(f_{\varphi(n)}(x_p))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente, et ceci pour tout } p \in \mathbb{N}}$.

Ce procédé d'extraction diagonal peut ne pas être inutile à retenir, il permet d'améliorer le procédé d'extractions successives ayant permis de montrer qu'un produit cartésien de compacts est un compact. Ici, on a pu faire converger un nombre dénombrable de suites par une extractrice commune.

16. Soit φ telle que dans la question précédente. Pour tout $x \in D$, on note $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\varphi(n)}(x)$. Cela définit donc une application $f : D \rightarrow F$, telle que $((f_{\varphi(n)})_{|D})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .

Soit $\varepsilon > 0$. La famille A étant équicontinue sur le compact K , elle est uniformément équicontinue (théorème de Heine, partie II). Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall (x, y) \in A^2 \quad \|x - y\| < \eta \implies \|f_{\varphi(n)}(x) - f_{\varphi(n)}(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $(x, y) \in D^2$ tels que $\|x - y\| < \eta$. Par convergence simple de $(f_{\varphi(n)})$ sur D , on dispose donc de N_1 et N_2 tels que pour tout $n \geq N_1$, et tout $n \geq N_2$,

$$\|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\|_F < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \|f_{\varphi(n)}(y) - f(y)\|_F < \frac{\varepsilon}{3}.$$

La propriété d'équicontinuité uniforme permet alors d'obtenir, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|f(y) - f_{\varphi(n)}(y)\|_F + \|f_{\varphi(n)}(y) - f_{\varphi(n)}(x)\| + \|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\|_F < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est uniformément continue sur } D}$.

17. Soit $(x_n) \in D^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow x \in K$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue sur D , on dispose de $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in D^2$ tels que $\|x - y\| < \eta$, $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

Or, on dispose également d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|x_n - x\| < \frac{\eta}{2}$, et donc pour tout $n, p \geq N$,

$$\|x_n - x_p\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_p\| < \eta, \quad \text{puis:} \quad \|f(x_n) - f(x_p)\| < \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $\boxed{(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy}}$.

D'après la partie I, on en déduit que $\boxed{(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}}$.

18. • Si on dispose d'une deuxième suite $(y_n) \in D^n$ telle que $y_n \rightarrow x$, alors $y_n - x_n \rightarrow 0$, et par critère séquentiel de la continuité uniforme de f sur D , on en déduit que $f(y_n) - f(x_n) \rightarrow 0$. Ainsi, $f(y_n)$ est également convergente, et de même limite que $f(x_n)$. Par critère séquentiel de la limite, on en déduit que f admet une limite lorsque $y \rightarrow x$, $y \in D$. On définit $f(x)$ comme étant égal à cette limite.
- Soit alors $\varepsilon > 0$, et $\eta > 0$ un module de continuité uniforme de f sur D associé à ε , donc tel que

$$\forall (x', y') \in D^2, \quad \|x' - y'\| < \eta \implies \|f(x') - f(y')\| < \varepsilon.$$

Soit $x \in K^2$. Pour tout $(x', x'') \in B(x, \frac{\eta}{2}) \cap D$,

$$\|x' - x''\| < \eta, \quad \text{donc:} \quad \|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon.$$

Ainsi, soit $y \in B(x, \frac{\eta}{2}) \cap K$. En passant à la limite lorsque $x' \rightarrow x$, $x' \in D$ et $x'' \rightarrow y$, $x'' \in D$, on en déduit que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

On a donc bien montré que pour tout $(x, y) \in K^2$,

$$\|x - y\| < \frac{\eta}{2} \implies \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue, et même uniformément continue sur } K}$.

19. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque A est uniformément équicontinue, il existe η tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $y \in B(x, \eta) \cap K$,

$$\|f_{\varphi(n)}(y) - f_{\varphi(n)}(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il existe aussi η' un module de continuité uniforme associé à f pour l'erreur $\frac{\varepsilon}{3}$. Quitte à prendre le minimum des 2, on peut supposer que $\eta' = \eta$.

D'après la partie III, K est précompact. On peut donc le recouvrir par des boules de rayon $\frac{\eta}{2}$ en nombre fini, qu'on note $B(a_1, \frac{\eta}{2}), \dots, B(a_m, \frac{\eta}{2})$. On suppose, sans perte de généralité, que chacune de ces boules ouvertes rencontre K . Comme D est dense dans K , elles rencontrent aussi D . Soit donc, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $b_i \in B(a_i, \frac{\eta}{2})$. On dispose, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, de N_i tel que pour tout $n \geq N_i$,

$$\|f_{\varphi(n_i)}(b_i) - f(b_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On pose $N = \max(N_1, \dots, N_m)$. Alors, pour tout $n \geq N$, et tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$\|f_{\varphi(n_i)}(b_i) - f(b_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit alors $x \in K$. On dispose d'un indice $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $x \in B(a_i, \frac{\eta}{2})$. Comme cette boule contient aussi b_i , on a donc

$$\|x - b_i\| \leq \eta, \quad \text{donc:} \quad \|f(x) - f(b_i)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_{\varphi(n)}(x) - f_{\varphi(n)}(b_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)\| &\leq \|f_{\varphi(n)}(x) - f_{\varphi(n)}(b_i)\| + \|f_{\varphi(n)}(b_i) - f(b_i)\| + \|f(b_i) - f(x)\| \\ &< 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in K$, on a bien montré que pour tout $n \geq N$, $\|f_{\varphi(n)} - f\|_{\infty} \leq \varepsilon$, et donc que

$$\boxed{f_{\varphi(n)} \longrightarrow f \text{ dans } (\mathcal{C}^0(K, F), \|\cdot\|_{\infty})}.$$

On déduit alors de la question 13 que $\boxed{\overline{A} \text{ est compact}}$, ce qui est bien ce qu'il fallait démontrer pour achever la preuve du théorème d'Ascoli.