DM n° 9 : Algèbre linéaire

Corrigé du problème 1 –

Partie I – Étude d’un endomorphisme de polynôme annulateur donné, et d’un projecteur.

On considère un endomorphisme f de l’espace vectoriel E vérifiant la relation :

$$f^3 = \frac{1}{3}(f^2 + f + I). \tag{1}$$

1. Étude des puissances de f et de son inversibilité.

(a) L’unicité de (a_n, b_n, c_n) provient de l’indépendance linéaire de I, f et f^2 .

L’existence peut se montrer en effectuant une division euclidienne de X^n par P , où $P = X^3 - \frac{1}{3}(X^2 + X + 1)$. Cela nous fournit deux polynômes Q_n et R_n , tels que $\deg(R_n) \geq 2$ et

$$X^n = PQ_n + R_n.$$

En notant $R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$, et en spécialisant en f , il vient :

$$f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n I$$

(b) On détermine a_n, b_n et c_n en évaluant la relation

$$X^n = PQ_n + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

en les racines de P . Or, 1 est racine évidente de P , donc on peut factoriser par $X - 1$:

$$P = (X - 1)\left(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right).$$

On pose

$$\alpha = \frac{-\frac{2}{3} + i\frac{2\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3}.$$

Ainsi, les racines de P sont 1, α et $\bar{\alpha}$. De plus, d’après les relations de Viète, le produit $|\alpha|^2$ de ces racines vaut $\frac{1}{3}$, donc $|\alpha| < 1$. Ainsi, $\alpha^n \rightarrow 0$

En évaluant la division euclidienne ci-dessus en 1, α et $\bar{\alpha}$, on obtient alors le système

$$\begin{cases} 1 = a_n + b_n + c_n \\ \alpha^n = a_n \alpha^2 + b_n \alpha + c_n \\ \bar{\alpha}^n = a_n \bar{\alpha}^2 + b_n \bar{\alpha} + c_n. \end{cases}$$

Réciproquement, si a_n, b_n et c_n vérifient ce système, $X^n - PQ_n$ et $a_n X^2 + b_n X + c_n$ coïncident en 1, α et $\bar{\alpha}$, et sont donc égaux par rigidité. L’unicité de la division euclidienne assure alors que le système est de Cramer. Soit A (indépendante de n) la matrice du système, et B_n le second membre. La solution s’exprime donc

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^{-1} B_n.$$

Or, le vecteur B_n admet une limite $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. L’expression du produit matriciel assure alors

que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ admet également une limite $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, égale à $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cette limite est donc obtenue en résolvant le système

$$\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 0 = a\alpha^2 + b\alpha + c \\ 0 = a\bar{\alpha}^2 + b\bar{\alpha} + c. \end{cases}$$

Puisque a , b et c sont réels, les deux dernières égalités sont redondantes, et fournissent deux équations réelles obtenues en identifiant partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{cases} 1 = a + b + c \\ 0 = -\frac{1}{9}a - \frac{1}{3}b + c \\ 0 = -\frac{2\sqrt{2}}{9}a + \frac{\sqrt{2}}{3}b \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = a + b + c \\ 0 = -a - 3b + 9c \\ 0 = -2a + 3b \end{cases}$$

On obtient sans difficulté

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}, \quad \boxed{b = \frac{1}{3}}, \quad \boxed{c = \frac{1}{6}}.$$

(c) D'après les résultats précédents, $q = \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{3}f + \frac{1}{6}I$. Calculons $q \circ q$:

$$\begin{aligned} q \circ q &= \frac{1}{36}(3f^2 + 2f + I)^2 = \frac{1}{36}(9f^4 + 12f^3 + 10f^2 + 4f + I) \\ &= \frac{1}{36}(3(f^3 + f^2 + f) + 12f^3 + 10f^2 + 4f + I) \\ &= \frac{1}{36}(5(f^2 + f + I) + 3f^2 + 3f + 10f^2 + 4f + I) = \frac{1}{36}(18f^2 + 12f + 6I) = q \end{aligned}$$

Donc $\boxed{q \text{ est un projecteur}}$.

(d) Puisque $I = 3f^3 - f^2 - f = f(3f^2 - f - I) = (3f^2 - f - I)f$, f est inversible, d'inverse

$$\boxed{f^{-1} = 3f^2 - f - I}.$$

2. Étude du projecteur q .

(a) i. Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: $f^n(x) = \lambda^n x$.

- On a $f^0(x) = \text{id}(x) = x = \lambda^0 x$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a donc $f^n(x) = \lambda^n x$. Par linéarité de f , il vient alors

$$f^{n+1}(x) = f(\lambda^n x) = \lambda^n f(x) = \lambda^n \cdot \lambda x = \lambda^{n+1} x,$$

l'avant-dernière égalité provenant du fait que x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .

Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, f^n(x) = \lambda^n x}$.

Par conséquent, x étant toujours un vecteur propre associé à λ , on a :

$$0 = f^3(x) - \frac{1}{3}(f^2(x) + f(x) + I(x)) = \lambda^3 x - \frac{1}{3}(\lambda^2 x + \lambda x + x) = \left(\lambda^3 - \frac{1}{3}(\lambda^2 + \lambda + 1)\right) x.$$

Puisque $x \neq 0$ (car c'est un vecteur propre), on en déduit la relation

$$\boxed{\lambda^3 = \frac{1}{3}(\lambda^2 + \lambda + 1)}.$$

- Les valeurs propres de f sont donc des racines du polynôme P introduit dans la partie I, polynôme dont les racines sont 1 , α et $\bar{\alpha}$. Par conséquent, toute valeur propre λ de f vérifie $\boxed{\lambda \in \{1, \alpha, \bar{\alpha}\}}$.
- Si f est une homothétie, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda I$ (il est nécessaire de considérer uniquement $\lambda \in \mathbb{R}$, et non $\lambda \in \mathbb{C}$, car E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel). Le réel λ est alors nécessairement une valeur propre de f . Ainsi, la seule possibilité est $\lambda = 1$. Donc $f = I$. Réciproquement l'identité vérifie bien la relation. Ainsi, $\boxed{\text{la seule homothétie vérifiant la relation (1) est l'identité } f = I}$.

- (b) • Soit x élément de $\text{Ker}(f - I) \cap \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Alors $f(x) = x$, et

$$0 = 3f(f(x)) + 2f(x) + x = 3f(x) + 2x + x = 6x.$$

Ainsi, $x = 0$. Par conséquent,

$$\text{Ker}(f - I) \cap \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \subset \{0\},$$

et l'inclusion réciproque étant immédiate, on a l'égalité.

Ainsi, la somme $\text{Ker}(f - I) + \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est directe.

• **Analyse :**

Soit $x \in E$. Supposons qu'il existe $y \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et $z \in \text{Ker}(f - I)$ tels que $x = y + z$.

En appliquant $3f^2 + 2f + I$ à cette relation, il vient :

$$(3f^2 + 2f + I)(x) = (3f^2 + 2f + I)(z),$$

et comme $z \in \text{Ker}(f - I)$, $I(z) = f(z) = f^2(z) = z$, donc

$$6z = 3f^2(x) + 2f(x) + x \quad \text{donc:} \quad z = \frac{1}{6}(3f^2(x) + 2f(x) + x) \quad \text{puis:} \quad y = x - z = \frac{1}{6}(5x - 2f(x) - 3f^2(x)).$$

• **Synthèse :** Réciproquement, soit $x \in E$. Posons

$$z = \frac{1}{6}(3f^2(x) + 2f(x) + x) \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{6}(5x - 2f(x) - 3f^2(x)),$$

et vérifions que ces valeurs conviennent : On a :

* $x = y + z$

* $(f - I)(z) = \frac{1}{6}(3f^3(x) - 3f^2(x) + 2f^2(x) - 2f(x) + f(x) - x) = \frac{1}{6}(3f^3(x) - f^2(x) - f(x) - x) = 0$,
d'après la relation (1). Ainsi, $z \in \text{Ker}(f - I)$.

* $(3f^2 + 2f + I)(y) = 0$ par un calcul du même accabit. Ainsi $y \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

On a bien prouvé l'existence de $y \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et $z \in \text{Ker}(f - I)$ tels que $x = y + z$. Ainsi

$$E \subset \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \oplus \text{Ker}(f - I).$$

L'inclusion réciproque étant immédiate, on a bien : $E = \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \oplus \text{Ker}(f - I)$.

- Par définition de q , $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = \text{Ker}(q)$
- Par ailleurs, soit $y \in \text{Ker}(f - I)$, donc $f(y) = y$. On a alors

$$q(y) = \frac{1}{6}(3f^2(y) + 2f(y) + y) = y.$$

Ainsi, $y \in \text{Im}(q)$. Par conséquent, $\text{Ker}(f - I) \subset \text{Im}(q)$.

Or, $\text{Ker}(q)$ et $\text{Im}(q)$ sont supplémentaires l'un de l'autre (car q est un projecteur, mais en fait l'égalité que cela donne sur les dimensions, issue du théorème du rang, est suffisante), ainsi que $\text{Ker}(q)$ et $\text{Ker}(f - I)$.

On en déduit que

$$\dim(\text{Ker}(f - I)) = \dim(\text{Im}(q)),$$

et comme on a une inclusion, on en déduit que $\text{Im}(q) = \text{Ker}(f - I)$

- Ainsi, q est la projection sur $\text{Ker}(f - I)$ parallèlement à $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.
- (c) • Soit $y \in \text{Im}(f - I)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = (f - I)(x)$. On a alors

$$(3f^2 + 2f + I)(y) = (3f^2 + 2f + I)(f - I)(x) = (3f^3 - f^2 - f - I)(x) = 0,$$

d'après la relation (1). On en déduit que $y \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

Ainsi, $\text{Im}(f - I) \subset \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

- De même que dans la question précédente, le théorème du rang et la supplémentarité de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et $\text{Ker}(f - I)$ amènent :

$$\dim(\text{Im}(f - I)) = \dim(\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)).$$

- L'inclusion et l'égalité des dimensions amène $\text{Im}(f - I) = \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$

Partie II – Étude des solutions de (1)

1. On suppose dans cette question que $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 0$.

- Soit e_1 un vecteur non nul de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda e_1 + \mu f(e_1) = 0$.

Si $\mu \neq 0$, alors $f(e_1) = \frac{\lambda}{\mu} e_1$, et donc e_1 est un vecteur propre, associé à une valeur propre réelle. La seule valeur propre réelle étant 1, on en déduit que $e_1 \in \text{Ker}(f - I)$. Ainsi

$$e_1 \in \text{Ker}(f - I) \cap \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = \{0\}.$$

Cela contredit l'hypothèse $e_1 \neq 0$.

Ainsi, $\mu = 0$, puis $\lambda = 0$. Donc $(e_1, f(e_1))$ est une famille libre.

- De plus, $f(e_1) \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. En effet, $3f^2(e_1) + 2f(e_1) + e_1 = 0$, donc en appliquant f :

$$(3f^2 + 2f + I)(f(e_1)) = 3f^3(e_1) + 2f^2(e_1) + f(e_1) = f \circ (3f^2 + 2f + I)(e_1) = 0,$$

car $e_1 \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Ainsi, $f(e_1) \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

- Il en résulte que $(e_1, f(e_1))$ est une famille libre de cardinal 2 de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, d'où :

$$\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \geq 2$$

2. On suppose dans cette question que $m = 2$.

D'après la question précédente, la dimension de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est soit 0, soit 2 (ne pouvant pas être plus grande) Comme $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ et $\text{Ker}(f - I)$ sont supplémentaires dans E de dimension 2, on obtient les 2 cas suivants :

- **Premier cas :** $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = 0$ et $\dim \text{Ker}(f - I) = 2$.

Alors, $\text{Ker}(f - I) = E$, donc, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = x$. Ainsi, $f = I$.

La matrice de f dans une base quelconque de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Deuxième cas :** $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = 2$ et $\dim \text{Ker}(f - I) = 0$.

Alors $E = \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Soit e_1 un vecteur non nul quelconque de $E = \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, et $e_2 = f(e_1)$. Alors, d'après la question III-1, (e_1, e_2) est une famille libre, donc (puisque E est de dimension 2) une base de $\mathbb{R}^2$. De plus :

$$* f(e_1) = e_2$$

$$* f(e_2) = f^2(e_1) = -\frac{1}{3}(2f(e_1) - e_1) = -\frac{1}{3}e_1 - \frac{2}{3}e_2.$$

Ainsi, la matrice de f dans la base (e_1, e_2) est $M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

3. On suppose dans cette question que $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) > 2$.

Soit e_2 un vecteur de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ tel que la famille $(e_1, f(e_1), e_2)$ soit libre. On peut trouver un tel vecteur puisque $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est de dimension au moins 3 (on peut compléter la famille libre $(e_1, f(e_1))$ en une base, donc en particulier trouver un troisième vecteur linéairement indépendant des deux premiers).

Supposons que la famille $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ n'est pas libre. Alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) + \lambda_3 e_2 + \lambda_4 f(e_2) = 0.$$

Puisque $(e_1, f(e_1), e_2)$ est libre, on a nécessairement $\lambda_4 \neq 0$. Quitte à diviser l'identité par $-\lambda_4$, on peut supposer que $\lambda_4 = -1$, donc que :

$$f(e_2) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 f(e_1) + \lambda_3 e_2.$$

En appliquant $3f$, il vient :

$$3f^2(e_2) = 3\lambda_1 f(e_1) + 3\lambda_2 f^2(e_1) + 3\lambda_3 f(e_2).$$

Comme e_1 et e_2 sont dans $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$,

$$-2f(e_2) - e_2 = 3\lambda_1 f(e_1) - 2\lambda_2 f(e_1) - \lambda_2 e_1 + 3\lambda_3 f(e_2),$$

d'où :

$$(-3\lambda_3 - 2)f(e_2) = -\lambda_2 e_1 + (3\lambda_1 - 2\lambda_2)f(e_1) + e_2.$$

En comparant à la relation initiale donnant $f(e_2)$ en fonction de e_1, e_2 et $f(e_1)$, il vient :

$$(3\lambda_3 + 2)f(e_2) = \lambda_2 e_1 + (2\lambda_2 - 3\lambda_1)f(e_1) - e_2 = \lambda_1(3\lambda_3 + 2)e_1 + \lambda_2(3\lambda_3 + 2)f(e_1) + \lambda_3(3\lambda_3 + 2)e_2.$$

Par liberté de $(e_1, f(e_1), e_2)$, la décomposition ci-dessus est unique, donc

$$\begin{cases} \lambda_2 & = \lambda_1(3\lambda_3 + 2) \\ (2\lambda_2 - 3\lambda_1) & = \lambda_2(3\lambda_3 + 2) \\ -1 & = \lambda_3(3\lambda_3 + 2) \end{cases}$$

De la dernière équation, on tire $3\lambda_3^2 + 2\lambda_3 + 1 = 0$, et comme le polynôme $3X^2 + 2X + 1$ n'admet pas de racine réelle, on aboutit à une contradiction.

Ainsi, la famille $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est libre.

Le même argument que dans la question III-2 permet de montrer que $f(e_2) \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, donc on a trouvé une famille libre de cardinal 4 de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Ainsi,

$$\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \geq 4.$$

4. On suppose dans cette question que $m = 3$.

Puisque $m = 3$, $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est de dimension au plus 3. D'après les questions III-1 et III-3, les seules dimensions possibles sont 0 et 2; comme dans la question III-2, les dimensions correspondantes de $\text{Ker}(f - I)$ sont respectivement 3 et 1.

- **Premier cas :** $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = 0$ et $\dim \text{Ker}(f - I) = 3$.

Alors $f = I$ et la matrice de f dans une base quelconque de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Deuxième cas :** $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = 2$ et $\dim \text{Ker}(f - I) = 1$.

Soit $b_1 = e_1 \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, et soit $b_2 = f(e_1)$. Alors, (b_1, b_2) est libre, donc une base de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ pour des raisons de dimension. Soit b_3 un vecteur non nul de $\text{Ker}(f - I)$ (donc une base de cet espace de dimension 1). Comme $E = \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \oplus \text{Ker}(f - I)$, la famille (b_1, b_2, b_3) est une base de E . Comme dans la question III-2, $f(b_1) = b_2$ et $f(b_2) = f^2(b_1) = -\frac{1}{3}b_1 - \frac{2}{3}b_2$. De plus $f(b_3) = b_3$. Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. De même, si $m = 4$, les dimensions possibles de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ sont 0, 2 ou 4. Ainsi :

- **Premier cas :** $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = 0$ et $\dim \text{Ker}(f - I) = 4$.

Alors $f = I$ et la matrice de f dans une base quelconque de $\mathbb{R}^4$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Deuxième cas :** $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = 2$ et $\dim \text{Ker}(f - I) = 2$.

Soit $b_1 = e_1 \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, et soit $b_2 = f(e_1)$. Alors, (b_1, b_2) est une base de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. Soit (b_3, b_4) une base de $\text{Ker}(f - I)$. Alors $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$, dans laquelle la matrice de f est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Troisième cas :** $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) = 4$ et $\dim \text{Ker}(f - I) = 0$. On peut alors trouver $(e_1, e_2) \in \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ tel que $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ soit une base de E . Comme dans les cas précédents, on a

$f(e_2) = -\frac{1}{3}e_2 - \frac{2}{3}f(e_2)$, d'où la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$:

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

6. (a) Soit k tel que $2k < \dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

Supposons qu'il existe $(e_1, \dots, e_k)$ tels que $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k))$ est une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille libre en une base de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ (par ajout d'au moins un vecteur, puisque $2k < \dim(\text{Ker}(3f^2 + 2f + I))$). Soit e_{k+1} l'un des vecteurs ajoutés de la sorte. Alors $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k), e_{k+1})$ est une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

(b) On raisonne comme en III-3 pour montrer la liberté de $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k), e_{k+1}, f(e_{k+1}))$.

On commence par une remarque qui simplifiera un peu les expressions :

si x est dans $\text{Vect}(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k))$, alors $f(x)$ aussi (immédiat en utilisant la relation (1)).

Notons $F = \text{Vect}(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k))$

Supposons que la famille $(e_1, f(e_1), \dots, e_{k+1}, f(e_{k+1}))$ n'est pas libre. Alors, $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k), e_{k+1})$ étant libre, en procédant comme en III-3, il existe un vecteur $x \in F$ et un réel λ tels que

$$f(e_{k+1}) = x + \lambda e_{k+1}.$$

Il vient alors

$$3f^2(e_{k+1}) = 3f(x) + 3\lambda f(e_{k+1}), \quad \text{donc:} \quad -2f(e_{k+1}) - e_{k+1} = 3f(x) + 3\lambda f(e_{k+1}).$$

On obtient donc :

$$(3\lambda + 2)f(e_{k+1}) = -e_{k+1} - 3f(x),$$

puis, en utilisant la relation initiale,

$$(3\lambda + 2)x + (3\lambda + 2)\lambda e_{k+1} = -3f(x) - e_{k+1}.$$

Comme $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k), e_{k+1})$ est libre, F et $\mathbb{R}e_{k+1}$ sont en somme directe, d'où l'unicité d'une décomposition en somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{R}e_{k+1}$. Comme x et $f(x)$ sont dans F , on en déduit que

$$(3\lambda + 2)x = -3f(x) \quad \text{et} \quad (3\lambda + 2)\lambda = -1.$$

De la deuxième équation, on tire $3\lambda^2 + 2\lambda + 1$, ce qui est impossible, le polynôme $3X^2 + 2X + 1$ n'ayant pas de racine réelle.

Ainsi, $(e_1, f(e_1), \dots, e_k, f(e_k), e_{k+1}, f(e_{k+1}))$ est libre.

Le même raisonnement que déjà fait montre que $f(e_{k+1})$ est un élément de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, donc il s'agit d'une famille libre de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

(c) On peut donc grossir la famille libre précédente de deux en deux tant qu'on n'atteint pas la dimension de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$. On obtient de la sorte une famille $(e_1, f(e_1), e_2, f(e_2), \dots, e_q, f(e_q))$, où $q = \lfloor \frac{1}{2} \dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I) \rfloor$. En effet, on a alors

$$2(q-1) < \dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I),$$

donc on peut bien continuer la construction jusqu'à ce stade.

(d) Si $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est impair, alors $2q > \dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, d'où une contradiction avec le cardinal de la famille libre trouvée dans la question précédente.

Ainsi, $\dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ est pair.

Dans ce cas, $2q = \dim \text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$, donc la famille libre de la question précédente est de cardinal maximal, donc : $(e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q))$ est une base de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$.

7. Considérons $(b_1, \dots, b_{2q}) = (e_1, f(e_1), \dots, e_q, f(e_q))$ la base de $\text{Ker}(3f^2 + 2f + I)$ trouvée plus haut. Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $f(b_{2i-1}) = b_{2i}$ et $f(b_{2i}) = -\frac{1}{3}b_{2i-1} - \frac{2}{3}b_{2i}$. Soit $(b_{2q+1}, \dots, b_m)$ une base de $\text{Ker}(f - I)$. Alors la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ est la matrice diagonale par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & A_q & 0 \\ 0 & \dots & 0 & I_{m-2q} \end{pmatrix}$$

8. Réciproquement, soit M la matrice de la question précédente. Alors, d'après les règles de produit matriciel par blocs, si $P(X) = 3X^3 - X^2 - X - 1$,

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & P(A_r) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P(I) \end{pmatrix}$$

Or, un calcul rapide montre que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ vérifie la relation $P(A) = 0$, donc on obtient finalement $\boxed{3M^3 = M^2 + M + I}$.

Corrigé du problème 2 – Théorème de Gerstenhaber (Mines-Ponts MP 2020, 3h)

Partie I – Généralités sur les endomorphismes nilpotents

1. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. D'après le résultat admis avant le problème, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure stricte. Notons T cette matrice. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T^k est encore triangulaire supérieure stricte, donc $\text{tr}(T^k) = 0$. Par ailleurs, la représentation matricielle des endomorphismes transformant composition en produit matriciel, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k) = T^k$.

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{\text{tr}(u^k) = \text{tr}(T^k) = 0},$$

puisque tous les coefficients diagonaux sont nuls.

2. • Pour commencer, le cours nous assure que $\varphi = \text{Mat}_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$. De plus, $T_n^{++}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ (engendré par les $E_{i,j}$, $i < j$). Ainsi, puisque $\mathcal{N}_{\mathcal{B}} = \varphi^{-1}(T_n^{++}(\mathbb{R}))$, on en déduit que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, de même dimension que $T_n^{++}(\mathbb{R})$.
- De plus, les matrices de $T_n^{++}(\mathbb{R})$ sont nilpotentes, de nilindice au plus n . Ainsi

$$\forall u \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^n) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^n = 0.$$

On en déduit que $u^n = 0$. Par conséquent, les endomorphismes de $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ sont tous nilpotents.

- On en déduit que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel nilpotent}}$ de $\mathcal{L}(E)$, et que sa dimension vaut $\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$.
- 3. • Clairement, puisque $\mathcal{N}_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{N}(E)$,

$$\{\nu(u) \mid \|u \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}\} \subset \{\nu(u) \mid \|u \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}\}.$$

- D'après le cours (soit en considérant une famille $(x, u(x), \dots, u^{\nu(u)-1}(x))$ libre, soit en remarquant que le polynôme minimal $X^{\nu(u)}$ ne peut pas excéder n , d'après le théorème de Cayley-Hamilton), on sait que $\nu(u) \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi,

$$\{\nu(u) \mid \|u \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}\} \subset \llbracket 1, n \rrbracket.$$

- Enfin, la matrice

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est nilpotente d'indice de nilpotence n . Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On peut alors considérer la matrice diagonale par blocs définie par :

$$M = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & 0_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$M = \begin{pmatrix} J_k^\ell & 0 \\ 0 & 0_{n-k} \end{pmatrix}.$$

La matrice J_k étant nilpotence d'indice k , il en est donc de même de la matrice M .

L'unique endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(E) = M$ est alors également nilpotent d'indice k , et est un élément de $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$.

On en déduit que $\llbracket 1, n \rrbracket \subset \{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}\}$

- Des 3 inclusions ci-dessus, on déduit, par transitivité, que

$$\boxed{\{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_{\mathcal{B}}\} = \{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}(E)\} = \llbracket 1, n \rrbracket}.$$

4. Soit x et y et $p \geq q$ tels que $u^p(x) = u^q(x) = 0$ et tels que $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ soit libre. Supposons que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ soit liée, et considérons des scalaires non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) + \sum_{k=0}^{q-1} \mu_k u^k(y) = 0.$$

- Si tous les λ_k sont nuls, l'égalité précédente contredit la liberté de la famille $(u^k(y))_{k \in [0, q-1]}$, provenant de la question 2.
- De même, les μ_k ne peuvent pas être tous nuls.
- Soit donc k_1 l'indice minimal tel que $\lambda_{k_1} \neq 0$, et k_2 l'indice minimal tel que $\mu_{k_2} \neq 0$.
- Si $k_2 + p - 1 - k_1 > q - 1$, donc si $k_2 > k_1 + q - p$, alors, en appliquant u^{p-1-k_1} à la relation, presque tous les termes s'annulent et on obtient :

$$\lambda_{k_1} u^{p-1}(x) = 0,$$

ce qui contredit $\lambda_{k_1} \neq 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$.

- De même si $k_2 < k_1 + q - p$ i.e. si $k_1 + q - 1 - k_2 > p - 1$. La symétrie des rôles de x et y amène une contradiction sur μ_{k_2} (l'inégalité entre p et q ne sert à rien dans ce raisonnement, elle a été posée en vue de simplifier un éventuel raisonnement itératif, que je trouve plus délicat à rédiger, personnellement).
- Si $k_2 = k_1 + q - p$, alors en appliquant u^{p-1-k_1} , on obtient cette fois une relation non triviale

$$\lambda_{k_1} u^{p-1}(x) + \mu_{k_2} u^{q-1}(y) = 0,$$

qui contredit la liberté de $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$.

Ainsi, $\boxed{\text{la famille } (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y)) \text{ est libre}}$.

5. Soit u est nilpotente de nilindice $p \geq \max(2, n - 1)$:

- Puisque $p \geq 2$, $\text{Im}(u^{p-1}) \subset \text{Im}(u)$ et puisque $u^p = 0$, $\text{Im}(u^{p-1}) \subset \text{Ker}(u)$.

Ainsi, $\text{Im}(u^{p-1}) \subset \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)$.

- Supposons par l'absurde que $\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)) \neq 1$.

Il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Puisque $u^p = 0$, on en déduit que $u^{p-1}(x) \in \text{Ker}(u)$. Puisque $p - 1 \geq 1$, $u^{p-1}(x) \in \text{Im}(u)$. On a donc $u^{p-1}(x) \in \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)$ et est non nul. Ainsi, $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \neq \{0\}$. Par hypothèse, cet espace est alors de dimension au moins 2, et il contient un vecteur z tel que $(u^{p-1}(x), z)$ soit libre. Puisque $z \in \text{Im}(u)$, on dispose de y tel que $u(y) = z$, et comme $z \in \text{Ker}(u)$, $u^2(y) = 0$. En appliquant la question 4 aux vecteurs x et y , on obtient une famille libre de cardinal $p + 1 > n$ ce qui est impossible.

Ainsi, $\boxed{\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)) = 1}$.

- On déduit des deux points précédents que $\text{rg}(u^{p-1}) \leq 1$. De plus, puisque $u^{p-1} \neq 0$, $\dim(\text{Im}(u^{p-1})) \geq 1$.

Les deux espaces étant de dimension 1, on en déduit alors que

$$\boxed{\text{Im}(u^{p-1}) = \text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{rg}(u^{p-1}) = 1}.$$

Partie II – Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, \langle -, - \rangle)$. Étant donné $a \in E$ et $x \in E$, on notera $a \otimes x$ l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall z \in E, \quad (a \otimes x)(z) = \langle a, z \rangle \cdot x.$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$.

- Montrons d'abord que $a \mapsto a \otimes x$ est à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$. Soit $(y, z) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors

$$(a \otimes x)(\lambda y + z) = \langle a, \lambda y + z \rangle \cdot x = \lambda \langle a, y \rangle \cdot x + \langle a, z \rangle \cdot x,$$

par bilinéarité du produit scalaire. Ainsi,

$$(a \otimes x)(\lambda y + z) = \lambda(a \otimes x)(y) + (a \otimes x)(z),$$

ce qui prouve bien la linéarité de $a \otimes x$, qui de plus, est clairement définie de E dans E . Ainsi, $a \otimes x \in \mathcal{L}(E)$.

- Par ailleurs, par définition de $a \otimes x$, $\text{Im}(a \otimes x) \subset \text{Vect}(x)$. On en déduit que l'application $\Phi : a \mapsto a \otimes x$ est bien définie de E dans $\mathcal{L}_x = \{u \in \mathcal{L}(E), \text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)\}$.

De plus, on s'assure facilement que $\mathcal{L}_x$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, puisqu'il contient 0, et que $\text{Vect}(x)$ est stable par combinaison linéaire (donc si u et v ont leur image dans $\text{Vect}(x)$, toute combinaison linéaire de u et v aussi).

- Montrons que Φ est linéaire. Pour cela, soit $(a, b) \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $z \in E$,

$$\Phi(a + \lambda b)(z) = ((a + \lambda b) \otimes x)(z) = \langle a + \lambda b, z \rangle \cdot x = \langle a, z \rangle \cdot x + \lambda \langle b, z \rangle \cdot x = \Phi(a)(z) + \lambda \Phi(b)(z).$$

Par conséquent, $\Phi(a + \lambda b) = \Phi(a) + \lambda \Phi(b)$. On en déduit que $\Phi \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}_x)$, avec les notations introduites ci-dessus.

- Montrons que Φ est injective. Pour cela considérons $a \in \text{Ker}(\Phi)$. On a alors, pour tout $z \in E$,

$$\langle a, z \rangle \cdot x = 0 \quad \text{donc} \quad \langle a, z \rangle = 0.$$

On en déduit que $a \in E^\perp = \{0\}$, donc $a = 0$. Ainsi, $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$, et on peut conclure que Φ est injective.

- Enfin, on remarque que $\mathcal{L}_x$ est isomorphe (par la corestriction) à $\mathcal{L}(E, \text{Vect}(x))$, qui est de dimension $n \cdot 1 = n$. Ainsi, Φ étant une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, on en déduit que Φ est un isomorphisme.

7. Soit $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ une base de E telle que $x_1 = x$. Une telle base existe d'après le théorème de la base incomplète.

Puisque $x = x_1$, par définition de $a \otimes x$, on obtient une description assez simple de sa matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a \otimes x) = \begin{pmatrix} \langle a, x \rangle & \langle a, x_2 \rangle & \dots & \langle a, x_n \rangle \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\text{tr}(a \otimes x) = \langle a, x \rangle$.

Partie III – Deux lemmes

L'objectif de cette partie est d'établir les deux lemmes suivants :

- **Lemme A.** Soit u et v dans $\mathcal{V}$. Alors $\text{tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k .
- **Lemme B.** Soit $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout v dans $\mathcal{V}$.

On se donne deux éléments arbitraires u et v de $\mathcal{V}$.

8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $u, v \in \mathcal{V}$. Attention à ne pas utiliser la formule du binôme ici, les endomorphismes ne commutent pas nécessairement !

- Montrons l'unicité (sous réserve d'existence). Si on dispose de deux familles d'endomorphismes $(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)})$ et $(g_0^{(k)}, \dots, g_k^{(k)})$ vérifiant la relation de l'énoncé, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)} = \sum_{i=0}^k t^i g_i^{(k)},$$

En particulier, en se fixant une base $\mathcal{B}$ de E , pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{i=0}^k t^i \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i^{(k)}) = \sum_{i=0}^k t^i \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g_i^{(k)}),$$

et donc

$$\sum_{i=0}^k t^i (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i^{(k)}) - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g_i^{(k)})) = 0$$

Ainsi, en considérant cette identité matricielle coefficient par coefficient, chaque coefficient est un polynôme s'annulant sur tout $\mathbb{R}$, donc ses coefficients sont tous nuls (c'est le polynôme formel nul, par rigidité polynomiale).

On en déduit que les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i^{(k)}) - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g_i^{(k)})$ sont toutes nulles, donc que pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_i^{(k)}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g_i^{(k)}) \quad \text{puis:} \quad f_i^{(k)} = g_i^{(k)}.$$

Cela prouve bien l'unicité de la famille recherchée.

- On montre l'existence par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.
  - * Pour $k = 1$, il suffit de poser $f_0^{(1)} = u$ et $f_1^{(1)} = v$.
  - * Supposons la propriété satisfaite à un rang $k \in \mathbb{N}^*$ donné. Soit $(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)})$ fournis par hypothèse de récurrence, vérifiant :

$$(u + tv)^k = \sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} (u + tv)^k &= (u + tv) \circ \sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)} \\ &= \sum_{i=0}^k t^i u \circ f_i^{(k)} + \sum_{i=0}^k t^{i+1} v \circ f_i^{(k)} \\ &= u \circ f_0^{(k)} + \sum_{i=1}^k t^i (u \circ f_i^{(k)} + v \circ f_{i-1}^{(k)}) + t^{k+1} v \circ f_k^{(k)}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser

$$\boxed{f_0^{(k+1)} = u \circ f_0^{(k)}}, \quad \boxed{f_{k+1}^{(k+1)} = v \circ f_k^{(k)}}, \quad \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad \boxed{f_i^{(k+1)} = u \circ f_i^{(k)} + v \circ f_{i-1}^{(k)}},$$

qui sont bien des endomorphismes de E .

- * Le principe de récurrence permet de conclure à l'existence d'une telle famille.
- La relation $f_0^{(k+1)} = u \circ f_0^{(k)}$, et l'initialisation $f_0^{(1)} = u$ amènent, par une récurrence triviale, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{f_0^{(k)} = u^k}$.
- On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}.$$

- * L'initialisation provient du fait, observé dans la question précédente, que $f_1^{(1)} = v$.
- * Soit k tel que la relation soit vérifiée pour $f_1^{(k)}$. Alors, d'après la relation trouvée dans la question précédente,

$$\begin{aligned} f_1^{(k+1)} &= u \circ f_1^{(k)} + v \circ f_0^{(k)} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} u^{i+1} v u^{k-1-i} + v u^k \\ &= \sum_{i=1}^k u^i v u^{k-i} + v u^k \\ &= \sum_{i=0}^k u^i v u^{k-i} \end{aligned}$$

- * D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}}$$

9. u et v sont deux endomorphismes nilpotents, éléments de $\mathcal{V}$. Comme $\mathcal{V}$ est par définition un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, $u + tv \in \mathcal{V}$, donc aussi nilpotent. Par définition de p , le nilindice de $u + tv$ vérifie

$$\nu(u + tv) \leq p.$$

On en déduit que $(u + tv)^p = 0$, et donc pour tout $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $f_i^{(p)} = 0$, par unicité de la décomposition. En particulier,

$$\boxed{\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = f_1^{(p)} = 0}.$$

10. • Puisque $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u + tv \in \mathcal{V}$. Ainsi, d'après la question I-4,

$$\text{tr}((u + tv)^{k+1}) = 0.$$

- Ainsi, par linéarité de la trace pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$0 = \sum_{i=0}^{k+1} t^i \text{tr}(f_i^{(k+1)}) = 0.$$

Par rigidité polynomiale, on en déduit que pour tout $i \in \llbracket 0, k + 1 \rrbracket$, $\text{tr}(f_i^{(k+1)}) = 0$.

- En particulier,

$$0 = \text{tr}(f_1^{(k+1)}) = \sum_{i=0}^k \text{tr}(u^i v u^{k-i}).$$

Par propriété de commutation interne de la trace, on en déduit que

$$0 = \sum_{i=0}^k \text{tr}(u^k v) = (k + 1) \text{tr}(u^k v).$$

Ainsi, $\boxed{\text{tr}(u^k v) = 0}$.

11. • Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(u + tv)^{p-1}(y) \in K(\mathcal{V})$, par définition de cet espace (puisque $u + tv \in \mathcal{V}$). Ainsi, d'après la question 1(b), $\boxed{f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})}$

- De plus, $\mathcal{V}$ étant de nilindice générique p , $(u + tv)^p = 0$ et donc $f_1^{(p)} = 0$. Ainsi, d'après la relation obtenue dans la question 2(a),

$$0 = u \circ f_1^{(p-1)} + v \circ f_0^{(p-1)}.$$

On en déduit que

$$u(f_1^{(p-1)}(y)) + v(u^{p-1}(y)) = 0.$$

Soit alors $x \in \text{Im}(u^{p-1})$ et y tel que $x = u^{p-1}(y)$. Alors

$$v(x) = v(u^{p-1}(y)) = -u(f_1^{(p-1)}(y)).$$

D'après le premier point, il vient donc $\boxed{v(x) \in u(K(\mathcal{V}))}$, et ceci pour tout $x \in \text{Im}(u^{p-1})$.

12. Soit $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \text{Im}(u^{p-1})$.

- Soit $y \in K(\mathcal{V})$. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ qu'il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $y_k \in K(\mathcal{V})$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$.
 * Pour $k = 0$, il suffit de prendre $\lambda_k = 0$ et $y_k = y$.
 * Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on dispose de $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et de $y_k \in K(\mathcal{V})$ tels que

$$y = \lambda_k x + u^k(y_k).$$

Par hypothèse, on a donc $y_k \in \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. Il existe donc $v \in \mathcal{V}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$y = \lambda_k x + u^k(\lambda x + v(x)).$$

Or, puisque $x \in \text{Im}(u^{p-1})$, $u(x) = 0$, donc $u^k(x) = \delta_{k,0}x$. Par conséquent,

$$y = (\lambda_k + \delta_{k,0}\lambda)x + u^k(v(x)).$$

D'après la question 4, $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$, et on en déduit que $u^k(v(x)) \in u^{k+1}(K(\mathcal{V}))$. On dispose donc de $y_{k+1} \in K(\mathcal{V})$ tel que $u^k(v(x)) = u^{k+1}(y_{k+1})$. En posant $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \delta_{k,0}\lambda$, il vient donc :

$$\boxed{y = \lambda_{k+1}x + u^{k+1}(y_{k+1})}, \quad y_{k+1} \in K(\mathcal{V}).$$

* D'après le principe de récurrence, on en déduit le résultat voulu.

En particulier, pour $k \geq p$, on obtient $y = \lambda_k x$, et donc $y \in \text{Vect}(x)$.

Puisque y a été choisi arbitrairement dans $K(\mathcal{V})$ on en déduit que $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x)$.

- Soit dans un premier temps $v \in \mathcal{V}$ tel que $v^{p-1} \neq 0$. Ainsi, il existe z tel que $v^{p-1}(z) \neq 0$. D'après la question précédente, $v^{p-1}(z) \in \text{Vect}(x) \setminus \{0\}$. Soit donc $\lambda \neq 0$ tel que

$$v^{p-1}(z) = \lambda x.$$

Comme $v^p = 0$, il en résulte que $\lambda v(x) = 0$, et puisque $\lambda \neq 0$, $v(x) = 0$.

- On considère maintenant $v \in \mathcal{V}$ quelconque. Soit $y \in E$ tel que $u^{p-1}(y) = x$. Alors, avec les notations de 2(a), $f_0^{(p-1)}(z) \neq 0$, donc d'après 1(a), l'égalité

$$\sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)}(z) = 0$$

ne peut être vérifiée que pour un nombre fini de valeurs de t . Il en résulte qu'il existe $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $(u + tv)^{p-1}(z) \neq 0$. Soit un tel réel t . L'application $u + tv$ est donc dans $\mathcal{V}$ et est de nilindice p .

D'après la question 5(b), on en déduit que $u(x) + tv(x) = 0$, donc que $tv(x) = 0$, et puisque $t \neq 0$, $v(x) = 0$.

C'est bien ce qu'il fallait montrer pour obtenir le lemme B.

Partie IV – Démonstration du théorème de Gerstenhaber

13. On introduit deux applications :

- $\Phi : \mathcal{V} \rightarrow E$, définie par $\Phi(v) = v(x)$;
- $\Psi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{L}(H)$, définie par $\Psi(u) = \pi \circ u$.

La linéarité de Φ est évidente, et $\mathcal{W} = \text{Ker}(\Phi)$, et $\mathcal{V}x = \text{Im}(\Phi)$. Ce sont donc des sous-espaces vectoriels respectifs de $\mathcal{V}$ et de E

En particulier, $\mathcal{W}$ étant un espace vectoriel, cela permet de justifier que Ψ est une application linéaire (linéarité évidente). De plus, $\mathcal{Z} = \text{Ker}(\Psi)$ et $\bar{\mathcal{V}} = \text{Im}(\Psi)$. Ce sont donc des sous-espaces vectoriels respectifs de $\mathcal{W}$ et de $\mathcal{L}(H)$.

14. En appliquant le théorème du rang à Φ et à Ψ , il vient alors :

$$\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \bar{\mathcal{V}}$$

15. • Pour tout $u \in \mathcal{Z}$, $\pi \circ u = 0$, donc $\text{Im}(u) \subset \text{Vect}(x)$. On en déduit que $\mathcal{Z} \subset \mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est l'espace introduit dans la partie III.

Or, $\varphi_x : a \mapsto a \otimes x$ est un isomorphisme de E sur F d'après III-3. Soit $L = \varphi_x^{-1}(\mathcal{Z})$. On a donc

$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x \mid a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim \mathcal{Z},$$

puisque φ_x est un isomorphisme.

- Puisque $(a \otimes x) \in \mathcal{W}$, en particulier, c'est un élément nilpotent. On déduit de III-5 et I-4 que

$$\langle a, x \rangle = \text{tr}(a \otimes x) = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in L$, $x \in L^\perp$.

16. Soit $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$.

- Puisque $(a \otimes x) \in \mathcal{V}$, il découle du lemme A que

$$\text{tr}(u(a \otimes x)) = 0.$$

La question III-5 permet alors d'affirmer que $\langle a, u(x) \rangle = 0$. Ainsi, $u(x) \in L^\perp$. Ceci étant vrai pour tout $u \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V}x \subset L^\perp$.

- Plus généralement, pour $k \geq 1$, $\text{tr}(u^k(a \otimes x)) = 0$ d'après le lemme B, donc on obtient de même avec III-5 que $u^k(x) \in L^\perp$. Cela reste vrai pour $k = 0$ d'après la question 2.

17. • Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda x \in \mathcal{V}x$. Ainsi, il existe $v \in \mathcal{V}$ tel que

$$v(x) = \lambda x, \quad \text{puis:} \quad v^p(x) = \lambda^p x.$$

Comme $v^p(x) = 0$ et $x \neq 0$, cela impose $\lambda^p = 0$, ce qui n'est pas possible puisqu'on a supposé $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Ainsi, pour tout $l \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{\lambda x \notin \mathcal{V}x}$.

- Par conséquent, $\text{Vect}(x) \cap \mathcal{V}x = \{0\}$, et la somme $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ est directe.

Puisque $L^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E , et puisque $\text{Vect}(x)$ et $\mathcal{V}x$ sont inclus dans $L^\perp$, on a

$$\boxed{\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x \subset L^\perp}$$

- On a donc

$$\dim(L^\perp) \geq \dim(\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) = \dim(\text{Vect}(x)) + \dim(\mathcal{V}x) = 1 + \dim \mathcal{V}x.$$

De plus, puisque E est de dimension finie, $L^\perp$ est un supplémentaire de L dans E , et

$$\dim L + \dim L^\perp = n$$

Par conséquent, en combinant les deux inégalités, $\boxed{\dim \mathcal{V}x + \dim L \leq n - 1}$

18. • Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $z \in H$, $\bar{u}^k(z) = \pi(u^k(z))$.

* L'initialisation découle de la définition de $\bar{u}$.

* Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $z \in H$, $\bar{u}^k(z) = \pi(u^k(z))$. Alors

$$\bar{u}^{k+1}(z) = \pi \circ u \circ \pi \circ u^k(z).$$

Puisque $H \oplus \text{Vect}(x) = E$, il existe $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$u^k(z) = h + \lambda x.$$

On a alors $\pi \circ u^k(x) = h$, et d'un autre côté, puisque $u(x) = 0$,

$$u^{k+1}(z) = u(h) = u \circ \pi \circ u^k(x).$$

Ainsi, on obtient bien

$$\boxed{\bar{u}^{k+1}(z) = \pi \circ u^{k+1}(x)}.$$

- Puisque u est nilpotente, on en déduit alors que $\bar{u}$ l'est aussi. Ainsi, $\bar{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(H)$.

C'est donc un

$\boxed{\text{sous-espace nilpotent de } \mathcal{L}(H)}$.

19. Par hypothèse de récurrence, $\dim(\bar{\mathcal{V}}) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Ainsi d'après les questions V-1, V-2 et V-5 :

$$\boxed{\dim(\mathcal{V}) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}}.$$

Cela achève la première partie de l'hérédité de la récurrence entamée en début de partie IV. Il faut encore étudier le cas d'égalité pour pouvoir conclure.

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\dim \mathcal{V} = \frac{n(n-1)}{2}$.

20. Les inégalités de la question précédente doivent donc être des égalités, ainsi :

$$\boxed{\dim \bar{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}}, \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} = n - 1.$$

Cette dernière égalité implique

$$\dim(\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim L = n$$

Comme de plus, $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x \subset L^\perp$ et $\dim L^\perp \leq n - \dim L = \dim(\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x)$, on déduit que

$$\boxed{\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x = L^\perp}$$

21. • Par hypothèse de récurrence, $\bar{\mathcal{V}}$ est isomorphe à un espace de matrices triangulaires supérieures strictes d'ordre $n - 1$, contenant notamment la matrice de Jordan de nilindice $n - 1$. Ainsi, le nilindice générique de $\bar{\mathcal{V}}$ est égal à $n - 1$ et minore le nilindice générique de $\mathcal{V}$. On en déduit que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égal à $n - 1$.
- Supposons que $\mathcal{V}x = \{0\}$. Soit $\mathcal{B}' = (b_2, \dots, b_n)$ une base de H dans laquelle les éléments de $\bar{\mathcal{V}}$ sont représentés par une matrice triangulaire stricte (possible par HR). On pose $b_1 = x$ et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$. Puisque $v(b_1) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ (du fait de notre supposition sur $\mathcal{V}x$), la construction faite en I-2 et I-3 est valide, et la représentation de tout $v \in \mathcal{V}$ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure stricte.

Compte tenu du résultat de la question 21, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.

On choisit x dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ (l'ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ a été défini dans la partie III). On note p le nilindice générique de $\mathcal{V}$, et on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \text{Im}(u^{p-1})$. On rappelle que $p \geq n - 1$ d'après la question 21.

22. • Puisque $v(x) \neq 0$, $\nu(v) \geq 2$, donc $p \geq 2$.
- Si $\text{Im}(v^{p-1}) = \{0\}$ le résultat est trivial.
- On peut donc supposer que $\text{Im}(v^{p-1}) \neq \{0\}$. Ainsi, v est de nilindice égal à $p \geq \max(2, n - 1)$. D'après la question II-5, $\text{rg}(v^{p-1}) = 1$. Puisque v est de nilindice $p - 1$, il existe $y \in E$ tel que $v^{p-1}(y) \neq 0$, et $y \notin \text{Vect}(x)$. Soit aussi q tel que $v^{q-1}(x) \neq 0$ et $v^q(x) = 0$. Par hypothèse, $q \geq 2$. Si $(v^{p-1}(y), v^{q-1}(x))$ est libre, la question II-4 donne une famille libre de cardinal strictement plus grand que n . Ainsi, la famille est liée, donc, les vecteurs étant par définition non nuls,

$$\text{Vect}(v^{q-1}(x)) = \text{Vect}(v^{p-1}(y)) = \text{Im}(v^{p-1}),$$

la dernière égalité venant du fait que cette image est de dimension 1.

- Or, d'après V-3, $v^{q-1}(x) \in L^\perp$ et donc, d'après V-8 :

$$\boxed{\text{Im}(v^{p-1}) \subset L^\perp = \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x.}$$

23. Supposons qu'il existe $v_0 \in \mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. Alors $v(x) + tv_0(x)$ ne peut être nul que pour au plus une valeur de t . Or $v + tv_0 \in \mathcal{V}$. Ainsi, pour toutes les valeurs réelles de t sauf au plus une, $\text{Im}((v + tv_0)^{p-1}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. D'après IV-1(b) (en évaluant en chaque $z \in E$) et en regardant le coefficient de t^0 du développement (correspondant à $f_0^{(k)}$ de IV-2(a), après avoir renommé les fonctions), on en déduit que

$$\boxed{\forall v \in \mathcal{V}, \text{Im}(v^{p-1}) \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x}$$

24. Le lemme B de la partie IV nous permet alors de conclure que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$, donc $\mathcal{V}x = 0$. La question V-9 permet de conclure à la validité de la récurrence, prouvant ainsi le théorème de Gerstenhaber.

Corrigé du problème 3 – Sous-espaces stables par un endomorphisme

Partie I – Quelques résultats préliminaires sur les sous-espaces stables

1. **Intersection et somme de sous-espaces stables.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

(a) $\boxed{E}$ est trivialement stable par u . On peut aussi considérer le sous-espace trivial $\{0\}$.

(b) Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces stables par u .

- Soit $x \in \bigcap_{i \in I} F_i$. Pour tout $i \in I$, $x \in F_i$, donc par stabilité de F_i par u , $u(x) \in F_i$. Ainsi, ceci étant valable

pour tout $i \in I$, $u(x) \in \bigcap_{i \in I} F_i$. On en déduit que $\boxed{\bigcap_{i \in I} F_i}$ est stable par u .

- Soit $x \in \sum_{i \in I} F_i$. Il existe donc des $x_i \in F_i$ (presque tous nuls si I est infini) tels que $x = \sum_{i \in I} x_i$. Par linéarité, on a alors

$$u(x) = \sum_{i \in I} u(x_i).$$

Or, les $u(x_i)$ étant dans F_i (et presque tous nuls si I est infini), on en déduit que $u(x) \in \sum_{i \in I} F_i$, donc que

$$\boxed{\sum_{i \in I} F_i \text{ est stable par } u.}$$

2. **Endomorphismes laissant stable un sous-espace donné.** Soit F un sous-espace de E .

(a) Soit F stable par u et v .

- Soit $x \in F$. On a $u(x) \in F$ et $v(x) \in F$. Comme F est un sous-espace vectoriel de E , il est stable par combinaison linéaire, donc $\lambda u(x) + v(x) \in F$. Ainsi, F est stable par $\lambda u + v$.
- Soit $x \in F$. Puisque F est stable par v , $v(x) \in F$, et puisque F est stable par u , $u(v(x)) \in F$, donc $u \circ v(x) \in F$. Ainsi, F est stable par $u \circ v$.

(b) Soit $A = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}$. Le sous-ensemble A de $\mathcal{L}(E)$ contient le neutre id_E , est stable par combinaison linéaire et par produit d'après la question précédente. Il s'agit donc d'une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

(c) Une algèbre A sur un corps K étant stable par produit et par combinaison linéaire, pour tout $x \in A$, et tout polynôme P à coefficients dans K , $P(x)$ est un élément de A . Ainsi, avec les notations de la question précédente, si $u \in A$, pour tout $P \in K[X]$, $P(u) \in A$. En d'autres termes, si F est stable par u , alors F est stable par tout élément $P(u)$ de $K[u]$ ($P \in K[X]$).

3. **Sous-espaces stables définis par des noyaux et images de polynômes en u .** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- (a) • Soit $x \in \text{Ker}(u)$. On a $u(x) = 0$, donc $u(u(x)) = u(0) = 0$, donc $u(x) \in \text{Ker}(u)$. Ainsi, $\text{Ker}(u)$ est stable par u .
- Soit $x \in \text{Im}(u)$. On a évidemment $u(x) \in \text{Im}(u)$ par définition de $\text{Im}(u)$. Ainsi, $\text{Im}(u)$ est stable par u .
- (b) Soit $P \in K[X]$.
- Soit $x \in \text{Ker}(P(u))$. On a donc $P(u)(x) = 0$, donc $u \circ P(u)(x) = 0$, et d'après la règle rappelée dans l'énoncé sur la commutation des polynômes d'endomorphisme, $P(u) \circ u(x) = 0$, c'est-à-dire $P(u)(u(x)) = 0$. Ainsi, $u(x) \in \text{Ker}(P(u))$. Par conséquent, $\text{Ker}(P(u))$ est stable par u .
- Soit $x \in \text{Im}(P(u))$. On fait de même : il existe y tel que $x = P(u)(y)$. On a alors

$$u(x) = u \circ P(u)(y) = P(u) \circ u(y) = P(u)(u(y)).$$

Ainsi, $u(x) \in \text{Im}(P(u))$, donc $\text{Im}(P(u))$ est stable par u .

4. **Polynôme minimal ponctuel.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$.

(a) La famille $(u^k(x))_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est liée, car de cardinal $n + 1$ alors que E est de dimension n . Ainsi, il existe une relation non triviale entre ces vecteurs, donc il existe des scalaires non tous nuls tels que

$$0 = \sum_{k=0}^n \lambda_k u^k(x) = P(u)(x),$$

avec $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k \neq 0$.

(b) Soit I_x l'ensemble des polynômes P tels que $P(u)(x) = 0$.

- On a évidemment $0 \in I_x$
- Si P et Q sont dans I_x , $(P - Q)(u)(x) = P(u)(x) - Q(u)(x) = 0$, donc $P - Q \in I_x$;
- Ainsi, I_x est un sous-groupe additif de $K[X]$.
- Soit $P \in I_x$ et $Q \in K[X]$. On a alors

$$(PQ)(u)(x) = Q(u) \circ P(u)(x) = Q(u)(0) = 0.$$

Ainsi, $PQ \in I_x$.

- On en déduit que I_x est un idéal de $K[X]$.

(c) L'idéal I_x n'est pas réduit à $\{0\}$ d'après 4(a). Puisque K est un corps, $K[X]$ est principal, donc l'idéal I_x est engendré par un polynôme $\pi_{u,x}$ qu'on peut choisir unitaire. Ce polynôme divisant tout autre polynôme de I_x , il est de degré minimal parmi les polynômes non nuls de I_x .

5. **Sous-espaces cycliques.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-espaces de E stables par u et tels que $X \subset F$. L'ensemble $\mathcal{F}$ n'est pas vide, puisqu'il contient trivialement E . On considère alors

$$F_0 = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F.$$

D'après 1(b), F_0 est stable par u . Il contient X car c'est le cas de chaque terme de l'intersection. Il est minimal pour cette propriété car par définition de l'intersection, pour tout $F \in \mathcal{F}$, $F_0 \subset F$.

- (b) • Puisque $\langle x \rangle_u$ est stable par u , il est stable par u^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ (question 2c), donc, puisque x en est un élément, $u^k(x) \in \langle x \rangle_u$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. S'agissant d'un espace vectoriel, on en conclut que $\text{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N}) \subset \langle x \rangle_u$.
- Réciproquement, $F = \text{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$ est stable par u . En effet, soit $y = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k u^k(x)$ un élément de F (les λ_k étant presque tous nuls). On a alors

$$u(y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k u^{k+1}(x) \in F.$$

De plus, F contient x (prendre $k = 1$). Ainsi, par minimalité de $\langle x \rangle_u$ pour ces propriétés, on a $\langle x \rangle_u \subset \text{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$.

- Ainsi, $\langle x \rangle_u = \text{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$
- La famille $(u^k(x))_{k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket}$ est libre, sinon on pourrait trouver une relation non triviale entre ces vecteurs, contredisant la minimalité du degré de $\pi_{u,x}$.
- Soit $y \in \text{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$. Il s'écrit donc sous la forme $y = P(u)(x)$, pour un certain polynôme P de $K[X]$. Soit $P = \pi_{u,x}Q + R$ la division euclidienne de P par $\pi_{u,x}$. On a alors $\deg(R) < \deg(\pi_{u,x})$. De plus

$$y = P(u)(x) = Q \circ \pi_{u,x}(u)(x) + R(u)(x) = R(u)(x).$$

Or, R étant de degré strictement plus petit que d , $R(u)(x)$ s'écrit comme combinaison linéaire des $u^k(x)$, pour $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$. Ainsi, $(u^k(x))_{k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket}$ est génératrice de $\text{Vect}(u^k(x), k \in \mathbb{N})$, donc de $\langle x \rangle_u$.

- Par conséquent, $\mathcal{B}_x = (u^k(x))_{k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket}$ est une base de $\langle x \rangle_u$.

- (c) Soit $b_k = u^k(x)$, $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 0, d-2 \rrbracket$, on a $u(b_k) = b_{k+1}$, et de plus, en notant

$$\pi_{u,x} = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k,$$

on a, puisque $\pi_{u,x}(u)(x) = 0$:

$$u(b_{d-1}) = u^d(x) = - \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(x) = - \sum_{k=0}^{d-1} a_k b_k.$$

On obtient donc la matrice d'ordre d suivante :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_x}(u_x) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{d-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix}$$

Soit u_x l'endomorphisme de $\langle x \rangle_u$ induit par u sur le sous-espace stable $\langle x \rangle_u$. Déterminer sa matrice dans la base $\mathcal{B}_x$ en fonction des coefficients du polynôme $\pi_{u,x}$.

Partie II – Sous-espaces stables par un projecteur ou une symétrie

Soit p un projecteur de E .

1. Soit F un sous-espace vectoriel de $\text{Im}(p)$ et G un sous-espace vectoriel de $\text{Ker}(p)$. Puisque p est un projecteur et que $F \subset \text{Im}(p)$, pour tout $x \in F$, $p(x) = x \in F$. Donc F est stable par p . Par ailleurs, pour tout $x \in G$, $u(x) = 0 \in G$, donc G est stable par u . On en déduit que $F + G$ est stable par u (question I-1(b)).
2. Soit H un sous-espace vectoriel de E stable par p .
  - Puisque p est un projecteur, $\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E$. Donc $\text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \{0\}$, et donc

$$(H \cap \text{Im}(p)) \cap (H \cap \text{Ker}(p)) = \{0\}.$$

On en déduit que la somme $(H \cap \text{Im}(p)) + (H \cap \text{Ker}(p))$ est directe.

- On a évidemment $(H \cap \text{Im}(p)) + (H \cap \text{Ker}(p)) \subset H$, les deux membres de la somme vérifiant cette inclusion.

- Soit $h \in H$. Comme $\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E$, on peut décomposer $h = x + y$, avec $x \in \text{Im}(p)$ et $y \in \text{Ker}(p)$. On a alors $p(x) = x$ et $p(y) = 0$, donc $p(h) = x$. Comme $h \in H$ et H stable par p , on en déduit que $x \in H$. Puis $y = h - x \in H$. Ainsi, $x \in \text{Im}(p) \cap H$ et $y \in \text{Ker}(p) \cap H$. On a bien obtenu

$$h \in (H \cap \text{Im}(p)) + (H \cap \text{Ker}(p)),$$

de quoi on déduit l'inclusion $H \subset (H \cap \text{Im}(p)) + (H \cap \text{Ker}(p))$.

- Les deux inclusions amènent : $H = (H \cap \text{Im}(p)) \oplus (H \cap \text{Ker}(p))$.

3. La question 1 montre que la somme d'un sous-espace de $\text{Im}(p)$ et d'un sous-espace de $\text{Ker}(p)$ est stable par p . La question 2 montre que tout sous-espace stable est de cette forme.

Ainsi, les sous-espaces stables sont exactement les sous-espaces s'écrivant sous la forme $H = F + G$, où F est un sev de $\text{Im}(p)$ et G un sev de $\text{Ker}(p)$.

Partie III – Diagonalisation

1. Valeurs propres et espaces propres

- (a) Le scalaire λ est valeur propre si et seulement s'il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$, donc $(u - \text{Id})(x) = 0$, donc si et seulement si $\text{Ker}(u - \text{Id})$ n'est pas réduit à 0. Cela équivaut à la non-injectivité de l'endomorphisme $u - \text{Id}$, donc à sa non bijectivité, puisque la dimension est finie.

Ainsi, λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \text{Id}$ est pas un automorphisme.

D'après ce qu'on vient de voir, les vecteurs propres associés à λ sont alors les vecteurs non nuls tels que $(u - \text{Id})(x) = 0$, c'est-à-dire tels que $x \in \text{Ker}(u - \text{Id})$.

- (b) Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de u et $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_k}(u)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, et tout $x \in F_i$, on a $x \in E_{\lambda_i}(u)$, donc $u(x) = \lambda_i x \in F_i$, puisque F_i est stable par multiplication par un scalaire. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, F_i est stable par u . D'après la question I-1(b), $F_1 + \dots + F_k$ est stable par u .

2. Valeurs propres et polynôme annulateur

- (a) Soit P un polynôme, et x un vecteur propre de u , associé à une valeur propre λ . On a $u(x) = \lambda x$, puis $u^2(x) = \lambda u(x) = \lambda^2 x$, et par une récurrence immédiate, $u^k(x) = \lambda^k x$.

Notant $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, on a alors

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^d a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^d a_k \lambda^k x = P(\lambda)x.$$

- (b) Soit P un polynôme annulateur de u et $\lambda \in \text{Sp}(u)$, et x un vecteur propre associé à λ . On a alors

$$0 = P(u)(x) = P(\lambda)x.$$

Par définition d'un vecteur propre, $x \neq 0$, donc $P(\lambda) = 0$, donc $\lambda \in \text{rac}(P)$. Ainsi, $\text{Sp}(u) \subset \text{rac}(P)$.

- (c) L'argument est à peu près le même que pour le polynôme minimal ponctuel, à part qu'on raisonne sur u au lieu de $u(x)$.

- I_u est non vide puisqu'il contient O le polynôme nul.
- Soit P et Q dans I_u . On a alors $P(u) = 0$ et $Q(u) = 0$, donc $(P - Q)(u) = P(u) - Q(u) = 0$. Donc $P - Q \in I_u$. On peut déjà conclure que I_u est un sous-groupe additif de $K[X]$.
- Soit P dans I_u et Q dans $K[X]$. On a alors

$$(PQ)(u) = Q(u) \circ P(u) = Q(u) \circ O_{\mathcal{L}(E)} = 0.$$

Ainsi, $PQ \in I_u$. On en déduit que I_u est un idéal de $K[X]$.

- L'espace E étant de dimension finie n , $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2 , donc la famille $(u^0, u^1, \dots, u^{n^2})$ est liée, puisqu'on son cardinal est supérieur à la dimension de l'espace $\mathcal{L}(E)$ dans lequel sont les u^i . Une relation non triviale entre les objets de cette famille fournit un polynôme annulateur non nul de u . Ainsi, I_u n'est pas réduit à $\{0\}$.
- Puisque $K[X]$ est principal, on en déduit que I_u est engendré par un polynôme π_u (qu'on peut choisir unitaire), de degré minimal parmi les polynômes non nul. On a alors $I_u = (\pi_u)$, donc par définition, tout P de I_u vérifie $\pi_u \mid P$.

(d) Soit λ une racine de π_u . On écrit $\pi_u = (X - \lambda)Q$, avec $Q \in K[X]$. On a alors

$$0 = \pi_u(u) = (u - \lambda \text{id}) \circ Q(u).$$

Si λ n'est pas une valeur propre de u , d'après 1(a), $u - \lambda \text{id}$ est un automorphisme, donc inversible dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$, donc régulier. On en déduit que $Q(u) = 0$. Or, π_u étant non nul, $Q \neq 0$, et $\deg Q < \deg \pi_u$, donc π_u ne divise par Q , alors que Q est un polynôme annulateur de u . Cela contredit la définition de π_u .

(e) D'après la question précédente, toute racine de π_u est valeur propre de u , donc $\text{rac}(\pi_u) \subset \text{Sp}(u)$. Comme π_u annule u , l'inclusion réciproque est assurée par la question 2(b). Ainsi, $\text{rac}(\pi_u) = \text{Sp}(u)$.

(f) Le polynôme π_u étant non nul, il admet un nombre fini de racines, donc d'après la question précédente, l'ensemble $\text{Sp}(u)$ est fini.

3. Lemme de décomposition des noyaux. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

(a) Soit P et Q deux polynômes de $K[X]$ premiers entre eux. D'après le théorème de Bezout, il existe deux polynômes U et V tels que

$$UP + BV = 1.$$

On a alors, en spécialisant à u :

$$U(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u) = \text{id}.$$

- Soit $x \in \text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u))$. On a alors, en appliquant l'identité précédente à x :

$$x = U(u)(P(u)(x)) + B(u)(Q(u)(x)) = U(u)(0) + B(u)(0) = 0.$$

Ainsi, $\text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u)) = \{0\}$, donc la somme est directe.

- On a trivialement $\text{Ker}(P(u)) \subset \text{Ker}(Q(u) \circ P(u)) = \text{Ker}((PQ)(u))$, et de même pour $\text{Ker}(Q(u))$. Par stabilité par somme, il vient alors

$$\text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}((PQ)(u)).$$

- Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}((PQ)(u))$. On applique l'identité obtenue ci-dessus à l'aide d'une relation de Bezout :

$$x = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x).$$

Or,

$$Q(u)(U(u) \circ P(u)(x)) = Q(u) \circ U(u) \circ P(u)(x) = U(u) \circ P(u) \circ Q(u)(x) = U(u) \circ (PQ)(u)(x) = U(u)(0) = 0,$$

puisque $x \in \text{Ker}((PQ)(u))$. Ainsi, $U(u) \circ P(u)(x) \in \text{Ker}(Q(u))$. On montre de même que $V(u) \circ Q(u)(x) \in \text{Ker}(P(u))$. Ainsi, on a bien décomposé x comme somme d'un élément de $\text{Ker}(P(u))$ et d'un élément de $\text{Ker}(Q(u))$. Par conséquent,

$$\text{Ker}((PQ)(u)) \subset \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u)).$$

- Les deux inclusions amènent $\text{Ker}((PQ)(u)) \subset \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$.

(b) On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ pour montrer que si $P_1, \dots, P_k$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux, alors

$$\text{Ker}((P_1 \cdots P_k)(u)) = \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(P_k(u)).$$

Le résultat est trivial pour $k = 1$. Il a été démontré dans la question précédente pour $k = 2$. Soit $k \geq 2$ tel que le résultat soit vrai pour k polynômes premiers entre eux 2 à 2, et considérons $P_1, \dots, P_{k+1}$ premiers entre eux deux à deux. On a alors $P_1 \cdots P_k$ et P_{k+1} qui sont premiers entre eux (les facteurs irréductibles de P_{k+1} n'étant facteur irréductible d'aucun autre P_i , donc par non plus du produit d'après le lemme d'Euclide). On utilise la question précédente, qui donne :

$$\text{Ker}((P_1 \cdots P_{k+1})(u)) = \text{Ker}((P_1 \cdots P_k)(u)) \oplus \text{Ker}(P_{k+1}(u)).$$

L'hypothèse de récurrence amène alors :

$$\text{Ker}((P_1 \cdots P_{k+1})(u)) = \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(P_k(u)) \oplus \text{Ker}(P_{k+1}(u)).$$

Le principe de récurrence permet donc de conclure que la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4. Diagonalisabilité.

- (a) Considérons le polynôme $P = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)$. Les λ_i étant deux à deux distincts, les polynômes $X - \lambda_i$ sont deux à deux premiers entre eux. D'après le lemme de décomposition des noyaux, il vient alors :

$$\boxed{\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}) = \bigoplus E_{\lambda_i}(u).}$$

La propriété de somme directe fait partie du résultat fourni par le lemme de décomposition des noyaux.

- (b) • Si u est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale. Notons m_i son i -ième coefficient diagonal. On a donc, par définition de la matrice d'un endomorphisme, $u(b_i) = m_i b_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc, b_i étant non nul, m_i est une valeur propre, et b_i est dans un espace propre, donc dans la somme des espaces propres. On a donc obtenu :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad b_i \in \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u).$$

Par stabilité par combinaison linéaire (ou par définition par minimalité de Vect), on a donc :

$$E = \text{Vect}(b_1, \dots, b_n) \subset \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u).$$

L'incusion réciproque étant évidente, on a $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$.

- Réciproquement, si $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$, on obtient une base de E en juxtaposant des bases des $E_{\lambda}(u)$. Une telle base est constituée de vecteurs b_i appartenant chacun à l'un des espaces propres. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\lambda_i \in \text{Sp}(u)$ tel que $u(b_i) = \lambda_i b_i$. Par définition de la matrice associée à u , la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est donc diagonale, ses coefficients diagonaux étant les λ_i . L'endomorphisme u est donc diagonalisable.
- (c) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres de u .
- Si u est diagonalisable, on a donc, en combinant 4a et 4b,

$$E = \text{Ker}\left(\prod_{i=1}^k (u - \lambda_i \text{id})\right).$$

Ainsi, en posant $P = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)$, $\text{Ker}(P(u)) = E$, donc $P(u) = 0$, donc P est un polynôme annulateur de u . Ainsi, π_u divise P . Comme ce dernier est scindé à racines simples, π_u est aussi scindé à racines simples.

- Réciproquement, supposons que π_u est scindé à racines simples. On a alors d'après 2(e) et le caractère unitaire de π_u ,

$$\pi_u(X) = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_k).$$

La question 4a amène alors

$$\text{Ker}(\pi_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_k}(u).$$

Or, π_u étant un polynôme annulateur de u , $\text{Ker}(\pi_u(u)) = E$, donc on est ramené à la question 4(b), nous permettant de conclure que u est diagonalisable.

Partie IV – Description des sous-espaces stables

1. Les $P_i^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux. Le théorème de décomposition des noyaux amène donc :

$$\boxed{E = \text{Ker}(\pi_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)).}$$

2. (a) Pour tout $P \in K[X]$, $P(u)$ laisse F stable (question I-2(c)) et coïncide clairement avec $P(v)$. Ainsi, $P(v)$ est l'endomorphisme induit par $P(u)$ sur F . En particulier, son noyau est obtenu en prenant l'intersection avec F du noyau de $P(u)$, d'après le cours. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$\boxed{\text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(v)) = \text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) \cap F.}$$

- (b) Par ailleurs, $pi_u(u) = 0$, et comme dit dans la question précédente, $\pi_u(v)$ est l'endomorphisme induit sur F par π_u . On a donc aussi $\pi_u(v) = O_{\mathcal{L}(F)}$. Ainsi, en appliquen le lemme des noyaux à $\pi_u(v)$, on obtient cette fois :

$$F = \text{Ker}(\pi_u(v)) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(v)),$$

et en vertu de la question précédente,

$$F = \bigoplus_{i=1}^k (\text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) \cap F).$$

3. • D'après I-1(b), si F est somme de sous-espaces des $\text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$ chacun stable par u , alors F est stable par u .
 • Réciproquement, si F est stable par u , la question précédente montre que F est somme de sous-espaces F_i des $\text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$, chaque F_i étant défini par :

$$F_i = \text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) \cap F.$$

De plus, F_i est intersection de sous-espaces stables par u (d'après I-3(b) pour le noyau), donc F_i est stable par u (d'après I-1(b)).

4. Comme on l'a déjà montré dans III-1(b) tout sous-espace F_i d'un espace propre de u est stable par u (car $x \in F_i$ vérifie $u(x) = \lambda x$). Ainsi, d'après la question précédente, les sous-espaces stables par u sont précisément les sous espaces obtenus comme sommes de sev de chacun des espaces propres de u .

Cela complète la question III-1(b) en établissant la réciproque.

5. Pour un projecteur, un polynôme annulateur est donné par $X^2 - X$. D'après 2(b), les seules valeurs propres possibles sont 0 et 1 (éventuellement l'un seul des deux si $p = 0$ ou $p = \text{id}$). D'après le cours, $\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E$, et $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{id})$. Cette décomposition correspond donc à celle de la question III-4(b). On en déduit que p est diagonalisable, et d'après ce qui précède, les sous-espaces stables sont bien obtenus comme somme d'un sous-espace de $\text{Ker}(p)$ et d'un sous-espace de $\text{Im}(p)$. C'est bien le résultat obtenu dans la partie II.

6. On suppose que u possède n valeurs propres distinctes, n étant la dimension de E .

- (a) Par définition, si λ est une valeur propre, $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$, donc sa dimension est au moins 1. De plus, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes de u , d'après III-3b, on a une somme directe

$$\bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(u) \subset E.$$

En passant aux dimensions,

$$\dim(E) \geq \dim \left(\bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(u) \right) = \sum_{i=1}^n \dim(E_{\lambda_i}(u)) \geq \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

Ceci implique que $\dim \left(\bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(u) \right) = n$, donc que l'inclusion $\bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(u) \subset E$ est une égalité donc d'après III-4(b), u est diagonalisable.

Par ailleurs, l'enchaînement des inégalités ci-dessus n'est possible que si toutes les inégalités considérées sont des égalités, ce qui nécessite, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité $\dim(E_{\lambda_i}(u)) = 1$. Ainsi, les sous-espaces propres sont tous des droites.

- (b) Les sous-espaces stables sont alors sommes de sous-espaces vectoriels des $E_{\lambda_i}(u)$. Or, chaque $E_{\lambda_i}(u)$ étant une droite, il n'a que deux sous-espaces possibles, $\{0\}$ et lui-même. On obtient donc une description simple des sous-espaces stables :

$$F_I = \bigoplus_{i \in I} E_{\lambda_i}(u) \quad I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket).$$

Chaque choix de I fournit un sous-espace différent. En effet, si $I \neq I'$, il existe j tel que $j \in I$ et $j \notin I'$ (ou l'inverse, qui se traite de même). Soit $x \in E_{\lambda_j}(u)$ non nul. On a alors $x \in F_I$, mais $x \notin F_{I'}$, car sinon, cela contredirait l'unicité de la décomposition de x dans la somme directe $\bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(u)$, une première décomposition étant donnée par son appartenant à $F_{I'}$ ayant une composante nulle sur $E_{\lambda_j}(u)$, puisque $j \notin I'$, et une seconde étant donnée par lui-même sur $E_{\lambda_j}(u)$, et des 0 partout ailleurs.

Ainsi, il y a autant de sous-espaces stables que de sous-ensembles I de $\llbracket 1, n \rrbracket$, à savoir 2^n .

Partie V – Endomorphismes semi-simples

1. Soit $y \in E$. On a par définition $\pi_u = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc en particulier $\pi_u(y) = 0$. L'ensemble des polynômes vérifiant cela étant par définition l'idéal engendré par $\pi_{u,y}$ (voir question I-4c), on en déduit que $\pi_{u,y}$ divise π_u .

2. On suppose dans cette question que π_u est irréductible. On souhaite montrer que u est semi-simple.

(a) Soit y non nul dans E . Dans ce cas, $\pi_{u,y}$ n'est pas constant. Comme il divise π_u qui est irréductible, on a nécessairement $\pi_{u,y} = \pi_u$.

(b) Soit F un sous-espace stable par u tel que $F \neq E$, et soit $x \in E \setminus F$. Comme F et $\langle x \rangle_u$ sont stables par u , $F \cap \langle x \rangle_u$ est stable par u . On a alors

De plus, supposons qu'il existe $y \neq 0$ dans cette intersection. Comme $F \cap \langle x \rangle_u$ est un sous-espace vectoriel stable par u contenant y , on a, par minimalité de $\langle y \rangle_u$, une inclusion $\langle y \rangle_u \subset F \cap \langle x \rangle_u \subset \langle x \rangle_u$.

Par ailleurs x et y étant non nuls, ils ont, d'après 2a, même polynôme minimal ponctuel, égal à π_u . D'après I-5b, on en déduit que $\langle y \rangle_u$ et $\langle x \rangle_u$ ont même dimension. On déduit alors que les inclusions précédentes sont des égalités :

$$\langle y \rangle_u = F \cap \langle x \rangle_u = \langle x \rangle_u.$$

La deuxième égalité contredit le fait que $x \notin F$. Ainsi, il n'existe pas d'élément non nul dans $F \cap \langle x \rangle_u$, donc $F \cap \langle x \rangle_u = \{0\}$.

(c) Soit F un sous-espace stable par u , et G un sous-espace stable par u de dimension maximale tel que $F \oplus G$ soit directe. Un tel sous-espace existe, car l'ensemble des sous-espaces stables en somme directe avec F est non vide (il contient $\{0\}$) et la dimension de ces espaces est bornée par la dimension de E .

Par I-1b, $F \oplus G$ est alors stable par u . Supposons que $F \oplus G \neq E$. Alors la question précédente donne l'existence de x tel que la somme $F \oplus G \oplus \langle x \rangle_u$ soit directe. L'espace $G \oplus \langle x \rangle_u$ est alors stable par u (toujours d'après I-1b), et de dimension strictement supérieure à G (car on a une inclusion stricte, obtenue en considérant x). De plus, sa somme avec F est directe. Cela contredit la maximalité du degré de G .

Ainsi, G est un supplémentaire de F , stable par u .

Pour tout sous-espace F stable par u , on a trouvé un supplémentaire de F stable par u , donc u est semi-simple.

3. On suppose dans cette question que $\pi_u = P_1 \cdots P_k$, les P_i étant irréductibles unitaires distincts.

(a) Quitte à renuméroter les P_i , on peut se contenter de montrer que $\text{Ker}(P_1(u)) \neq \{0\}$.

Si $\text{Ker}(P_1(u)) = \{0\}$, $P_1(u)$ est un automorphisme, donc régulier dans $\mathcal{L}(E)$. L'égalité $P_1(u) \circ P_2(u) \circ \cdots \circ P_k(u) = 0$ se simplifie donc en $P_2(u) \circ \cdots \circ P_k(u) = 0$, ce qui contredit la minimalité du polynôme annulateur π_u . Ainsi, $\text{Ker}(P_1(u)) \neq \{0\}$.

D'après la partie I, $\text{Ker}(P_i(u))$ est stable par u . On peut donc considérer l'induit φ_i de u sur cet espace. On a alors, pour tout $x \in \text{Ker}(P_i(u))$

$$P_i(v)(x) = P_i(u)(x) = 0.$$

Donc P_i est un polynôme annulateur de v . Le polynôme minimal π_v de v divise donc P_i qui est irréductible, donc $\pi_v = 1$ ou $\pi_v = P_i$. Le premier cas n'est pas possible (cela signifierait $\text{id} = 0$, ce qui contredit que $\text{Ker}(P_i(u)) \neq \{0\}$). Ainsi, $\pi_v = P_i$.

Donc v_i a un polynôme minimal irréductible, donc d'après la question 2, v_i est semi-simple.

(b) Soit F un sous-espace stable par u . On a alors, d'après IV-2b,

$$F = \bigoplus_{i=1}^k (\text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) \cap F)$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) \cap F$ est stable par v_i , qui est semi-simple. Cet espace admet donc un supplémentaire G_i dans $\text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u))$, stable par v_i , donc aussi stable par u . On a alors

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) = \bigoplus_{i=1}^k (\text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) \cap F) \oplus G_i \\ &= \bigoplus_{i=1}^k (\text{Ker}(P_i^{\alpha_i}(u)) \cap F) \oplus \bigoplus_{i=1}^k G_i = F \oplus G, \end{aligned}$$

où on a posé $G = \bigoplus_{i=1}^k G_i$, stable par u d'après I-1b et la stabilité de chaque G_i .

Ainsi, on a bien trouvé un supplémentaire de F stable par u , donc u est semi-simple.

4. On suppose inversement qu'il existe un irréductible unitaire P de $K[X]$ tel que P^2 divise π_u . On note $\pi_u = PQ$, avec $Q \in K[X]$. Soit $F = \text{Ker}(P(u))$. Le sous-espace F est stable par u d'après I-3. Supposons qu'il existe un supplémentaire S de F stable par u .

(a) Soit $x \in S$. On a alors

$$0 = \pi_u(u)(x) = P(u) \circ Q(u)(x) = P(u)(Q(u)(x)).$$

Ainsi, $\boxed{Q(u)(x) \in \text{Ker}(P(u)) = F}$. Or, S étant stable par u , il est stable par $Q(u)$ aussi (I-2). Comme $x \in S$, il vient donc $Q(u)(x) \in S$. On a donc $Q(u)(x) \in S \cap F = \{0\}$, ces deux espaces étant supplémentaires. Ainsi, $\boxed{Q(u)(x) = 0}$.

(b) Pour tout $x \in F$, $P(u)(x) = 0$, donc aussi $Q(u)(x) = 0$, puisque P est aussi encore facteur de Q par hypothèse. Pour tout $x \in S$, on a aussi $Q(u)(x) = 0$. Ainsi, par linéarité, pour tout $x \in E = F \oplus S$, on a $Q(u)(x) = 0$, donc Q est un polynôme annulateur de u . Cela contredit la minimalité de P .

Ainsi, $\text{Ker}(P(u))$ est stable par u mais n'admet pas de supplémentaire stable par u . On en déduit que $\boxed{u \text{ n'est pas semi-simple.}}$

On a donc montré que u est semi-simple si et seulement si son polynôme minimale n'a pas de facteur irréductible multiple.

Partie VI – $K[u]$ -modules et sous-espaces stables

1. L'application $\varphi_u : K[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi_u(P) = P(u)$ est un morphisme d'anneau : on a en effet $\varphi_u(1) = \text{id}_{\mathcal{L}(E)}$, $\varphi_u(P + Q) = (P + Q)(u) = P(u) + Q(u) = \varphi_u(P) + \varphi_u(Q)$ et $\varphi_u(PQ) = (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = \text{phi}_u(P) \circ \varphi_u(Q)$.

Ainsi, l'image de φ_u est un anneau. Or par définition, $\text{Im}(\varphi_u) = K[u]$. Ainsi, $\boxed{K[u] \text{ est un anneau.}}$

Par ailleurs, par définition, $\text{Ker}(\varphi_u)$ est l'idéal des polynômes annulateurs de u , engendré par π_u . En quotientant par le noyau et en corestringant à l'image, on obtient donc un isomorphisme d'anneaux $\boxed{K[X]/(\pi_u) \simeq K[u]}$.

2. On a déjà la structure de groupe abélien provenant de la structure d'espace vectoriel sur K . Il reste à vérifier les propriétés relatives au produit externe :

- $(P(u) \circ Q(u)) \cdot x = P(u) \circ Q(u)(x) = P(u)(Q(u)(x)) = P(u) \cdot Q(u)(x) = P(u) \cdot (Q(u) \cdot x)$.
- $\text{id} \cdot x = \text{id}(x) = x$
- $P(u) \cdot (x + y) = P(u)(x + y) = P(u)(x) + P(u)(y) = P(u) \cdot x + P(u) \cdot y$
- $(P(u) + Q(u)) \cdot x = (P + Q)(u)(x) = P(u)(x) + Q(u)(x) = P(u) \cdot x + Q(u) \cdot x$.

Ainsi, toutes les propriétés requises sont satisfaites : $\boxed{E \text{ est un } K[u]\text{-module.}}$

3. Soit M un sous- $K[u]$ -module de E . Alors M est par définition non vide, stable par somme, et stable par multiplication externe définie comme ci-dessus par un élément de $K[u]$. Les deux autres propriétés étant satisfaites, il suffit de vérifier que M est stable par multiplication par un scalaire λ de K .

Considérons l'élément $\lambda \text{id} \in K[u]$. Pour tout $x \in M$, on a alors $(\lambda \text{id}) \cdot x \in M$, c'est-à-dire $\lambda x \in M$.

Ainsi, M est non vide, stable par somme et par multiplication par un scalaire λ de K . Donc $\boxed{M \text{ est un sous-}K\text{-ev de } E}$.

la réciproque n'est pas vraie en général. Supposons que tout sous- K espace vectoriel de u soit un sous- $K[u]$ -module. En particulier, pour tout $x \in E$, la droite Kx est stable par $K[u]$. En prenant $u \in K[u]$, on obtient la stabilité de Kx par u . Ainsi, toute droite est stable par u . En d'autres termes, pour tout $x \in E$, x et $u(x)$ sont liés. Cela ne vous rappelle par quelque chose ?

On en déduit que $\boxed{u \text{ est une homothétie}}$. Réciproquement, si u est une homothétie, on a un polynôme annulateur de degré 1 (de la forme $\pi_u = X - \lambda$). Ainsi, $K[u] = K/(X - \lambda) \simeq K$ (par division euclidienne). Via cet isomorphisme, la loi externe définie sur $K[u]$ coïncide avec celle définie sur K . Ainsi, les notions de $K[u]$ -module et de K -ev coïncident dans cette situation.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

- Si F est stable par u , il est stable par tout élément $P(u)$ de $K[u]$. Ainsi, il est stable par produit externe par un élément $P(u)$ de $K[u]$. Comme par ailleurs, il est aussi stable par somme (en tant que sev) et contient 0, il s'agit bien d'un $\boxed{\text{sous-}K[X]\text{-module de } E}$.
- Réciproquement si F est un sous- $K[X]$ -module de E , il est stable par multiplication externe par tout $P(u)$ de $K[u]$, donc en particulier, il est stable par multiplication externe par u , ce qui équivaut à la $\boxed{\text{stabilité du sev } F}$ par l'endomorphisme u .

5. On suppose que π_u est irréductible.

- (a) L'anneau $K[u]$ est isomorphe à $K[X]/(\pi_u)$. On a déjà montré que cet anneau est un corps lorsque π_u est irréductible. En effet, si a est un élément non nul, représenté par un polynôme Q , ce polynôme est premier avec π_u (car leur pgcd divisant π_u , il est 1, ou π_u , par irréductibilité, ce dernier cas étant impossible, sinon a serait nul). Soit $UQ + V\pi_u = 1$ une relation de Bezout. On passe dans le quotient : $\bar{U}a = 1$. Cela prouve bien l'inversibilité de a .

Donc $K[X]/(\pi_u)$ est un corps, donc $K[u]$ est un corps.

- (b) En particulier, puisque $K[u]$ est un corps, les $K[u]$ -modules sont en fait des $K[u]$ -ev. Soit alors F stable par u . F est donc un sous- $K[u]$ -ev de E . Puisqu'on travaille ici avec des espaces vectoriels et non seulement des modules, F admet donc un supplémentaire G en tant que $K[u]$ -ev (on est en dimension finie, et même sinon, on pourrait le faire avec l'axiome du choix). Ainsi, ce supplémentaire est un K -ev muni d'une structure de $K[u]$ -ev donc stable par u et est un supplémentaire de F également au sens des K -ev.

On a bien montré que tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable par u .

Ainsi, u est semi-simple.

Partie VII – Endomorphismes cycliques et endomorphismes simples

1. On suppose dans cette question que u est cyclique, et on fixe $x \in E$ tel que $\langle x \rangle_u = E$. Soit F un sous-espace stable par u .

- (a) C'est toujours pareil, il suffit de montrer que I est un idéal de $K[X]$. La stabilité de F par somme nous donne facilement la structure de groupe abélien. Si $P \in I$ et $Q \in K[X]$, $(QP)(u)(x) = Q(u)(P(u)(x))$. Comme $P(u)(x)$ est dans F qui est stable par u , donc aussi par $Q(u)$, on en déduit que $(QP)(u)(x) \in F$, donc $QP \in I$.

Ainsi, I est un idéal de $K[X]$, non nul puisqu'il contient tout polynôme annulateur de u (donc en particulier π_u). Il est donc engendré par un polynôme unitaire D : $I = (D)$. De plus, puisque $\pi_u \in I$, on a alors

$$D \mid \pi_u.$$

- (b) • Puisque $D(u)(x) \in F$ et F est stable par u , par minimalité de $\langle D(u)(x) \rangle_u$ pour cette propriété, on a l'inclusion $\langle D(u)(x) \rangle_u \subset F$.
- Réciproquement, si $y \in F$, comme $\langle x \rangle_u = E$, et par description de $\langle x \rangle_u$ (I-5b), il existe P tel que $y = P(u)(x)$. Comme $y \in F$, par définition de I (question précédente), on a $P \in I$, et cet idéal étant engendré par D , il existe un polynôme Q tel que $P = QD$. On a alors $y = Q(u)(D(u)(x)) \in \langle D(u)(x) \rangle_u$. Par conséquent, $F \subset \langle D(u)(x) \rangle_u$.
- Les deux inclusions donnent l'égalité $\langle D(u)(x) \rangle_u = F$.

- (c) Puisque x est fixé, un sous-espace stable est entièrement déterminé par la seule donnée d'un diviseur unitaire D de π_u (en disant cela, on n'affirme pas que le choix de deux diviseurs distincts fournit deux sous-espaces stables distincts). Comme π_u admet un nombre fini de diviseurs unitaires (donné par le choix, pour chaque facteur irréductible intervenant dans π_u , de sa multiplicité, devant rester inférieur ou égal à la multiplicité totale dans π_u), on en déduit qu'il existe un nombre fini de sous-espaces stables par u .

2. On suppose que K est infini. Supposons que E n'admet qu'un nombre fini de sous-espaces stables par u . En particulier, E n'admet qu'un nombre fini de sous-espaces cycliques de la forme $\langle x \rangle_u$. On note $F_1, \dots, F_k$ les sous-espaces de ce type. Chaque élément $x \in E$ appartient à l'un des F_i (car $x \in \langle x \rangle_u$, et par définition $\langle x \rangle_u$ est l'un des F_i). Ainsi, $E = F_1 \cup \dots \cup F_n$.

On a déjà vu en exercice que si K est infini, E n'est pas l'union de sous-espaces vectoriels stricts. En effet, supposons que les F_i sont des sev stricts. On peut alors considérer $x \in F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$ tel que $x \notin F_n$ (sinon, on a une inclusion, et l'égalité de l'union à E amène F_n , ce qui contredit notre hypothèse). Quitte à supprimer certains des derniers termes de l'union, on peut supposer que $F_1 \cup \dots \cup F_{n-1} \neq E$, et on peut faire le même raisonnement de façon symétrique : il existe $y \in F_n$ tel que $y \notin F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$. Considérons alors les vecteurs $x + ty$, pour $t \in K$. Ces vecteurs sont en nombre infini (car K est infini), et sont chacun dans l'un des F_i , qui sont en nombre fini. Il existe donc au moins deux valeurs distinctes t_1 et t_2 tels que $x + t_1y$ et $x + t_2y$ sont dans le même F_i (principe des tiroirs). On a alors, par différence, $(t_2 - t_1)y \in F_i$, donc puisque $t_2 - t_1 \neq 0$, $y \in F_i$. Cela contredit la définition de y , sauf si $i = n$. Mais dans ce cas, puisque $x + t_1y \in F_n$ et $y \in F_n$, on obtient $x \in F_n$, ce qui contredit cette fois la définition de x .

Ainsi, E ne peut pas être une union finie de sous-espaces stricts. On en déduit que l'un des F_i est égal à E . Or, pour un tel i , par définition des F_i , il existe un vecteur x tel que $\langle x \rangle_u = F_i = E$. On en déduit que

u est cyclique.

3. Dans cette question, on souhaite montrer que u est simple si et seulement si son polynôme minimal est irréductible de degré égal à $n = \dim(E)$.

- (a) Comme précédemment, π_u étant irréductible, $K[u]$ est un corps, isomorphe à $K[X]/(\pi_u)$. Nous avons déjà eu l'occasion de montrer que les classes de $1, X, \dots, X^{d-1}$ forment alors une base sur K de cet espace. Ainsi, $K[u]$ est un K -ev de dimension d . Soit F un sous- $K[u]$ -espace vectoriel de E , de dimension k . Soit $c_1, \dots, c_k$ une base de F en tant que $K[u]$ -ev. Soit $(b_1, \dots, b_d)$ une base de $K[u]$ en tant que K -ev. La famille $(b_i c_j)$ est alors une base de F en tant que K -ev. En effet,
- elle est génératrice : soit $x \in F$, il existe des éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de $K[u]$ tels que

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j c_j.$$

Comme les λ_j sont dans $K[u]$ et que $(b_1, \dots, b_d)$ est une base de $K[u]$ sur k , il existe, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, des scalaires $\mu_{1,j}, \dots, \mu_{d,j}$ tels que

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^d \mu_{i,j} b_i.$$

On a donc : $x = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^d \mu_{i,j} b_i c_j$;

- elle est libre : en effet, soit $(m_{i,j})$ une famille de scalaires de K tels que

$$0 = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, d \rrbracket \times \llbracket 1, k \rrbracket} m_{i,j} b_i c_j = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^d m_{i,j} b_i \right) c_j.$$

Les éléments $\sum_{i=1}^d m_{i,j} b_i$ étant dans $K[u]$, par liberté de la famille (c_j) sur $K[u]$, on obtient, pour tout

$j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $\sum_{i=1}^d m_{i,j} b_i = 0$, puis par liberté de (b_i) , pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, pour tout $i \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $m_{i,j} = 0$.

Ainsi, la dimension sur K de F est kd , donc divisible par d .

- (b) Si π_u est irréductible de degré n , tout sous-espace stable F sera donc un sous- $K[u]$ -ev de E , donc de K -dimension divisible par $n = \dim E$, ceci n'est possible que si $F = \{0\}$ ou $F = E$. Ainsi, u est simple.
- (c) Réciproquement, si u est simple, il est en particulier semi-simple, donc π_u n'admet pas de facteur multiple dans sa décomposition irréductible. S'il admet plusieurs facteurs irréductibles, la décomposition en noyaux de la question IV-1 fournit une décomposition non triviale de E en somme directe de sous-espaces stables, ce qui contredit la simplicité de u . Ainsi, π_u est irréductible. D'après ce qui précède, son degré d va diviser n (car E est un $K[u]$ -module). Si $d \neq n$, E est de $K[u]$ -dimension strictement supérieure à 1, donc admet des sous- $K[u]$ -ev stricts non triviaux, correspondant à des sous-ev stricts non triviaux de E stables par u . cela contredit la simplicité de u .

Ainsi, le polynôme minimal de u est irréductible de degré n .