

DM n° 10 : Réduction

Corrigé de l'exercice 1 –

1. • * Le polynôme caractéristique de M_1 est

$$\chi_{M_1} = X^2 - \text{tr}(M_1)X + \det(M_1) = X^2 - 2X - 3 = (X + 1)(X - 3).$$

Ainsi, $\text{Sp}(M_1) = \{-1, 3\}$.

- * Comme le polynôme caractéristique est simplement scindé, on peut en déduire que M_1 est diagonalisable, et les sous-espaces sont de dimension 1. Pour trouver une base de diagonalisation, il suffit donc de trouver un vecteur propre dans chaque sous-espace propre.

- * On a : $M + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Les colonnes de cette matrice vérifient $C_1 - C_2 = 0$, donc $(M + I) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$,

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(M_1 - I) = E_1$. Puisque $\dim E_1 = 1$, on en déduit que $E_1 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- * On a : $M - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Les colonnes de cette matrice vérifient $C_1 + C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in$

$\text{Ker}(M_1 + 3I) = E_{-3}$. Puisque $\dim E_{-3} = 1$, on en déduit que $E_{-3} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- * Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, on a $M_1 = PDP^{-1}$.

- * Le polynôme caractéristique de M_2 est

$$\chi_{M_2} = X^2 - \text{tr}(M_2)X + \det(M_2) = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2.$$

Ainsi, $\text{Sp}(M_2) = \{2\}$

- * Le polynôme minimal μ_{M_2} n'a donc qu'une racine. Par ailleurs, $X - 2$ n'étant clairement pas annulateur de M_2 , μ_{M_2} n'est pas scindé. On en déduit que M_2 n'est pas diagonalisable.
- * Puisque M_3 est triangulaire par blocs, le polynôme caractéristique de M_3 est

$$\chi_{M_3} = (X - 1)\chi_A,$$

où $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Or

$$\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - X = X(X - 1).$$

Ainsi, $\chi_{M_3} = (X - 1)^2 X$. Par conséquent, $\text{Sp}(M_3) = \{0, 1\}$.

- * La matrice M_3 est donc diagonalisable si et seulement si μ_{M_3} est simplement scindé de racines 0 et 1, donc si $\mu_{M_3} = X^2 - X$. Un calcul direct montre qu'effectivement, $M_3^2 = M_3$, donc M_3 est diagonalisable. En particulier, la dimension des espaces propres est alors égale à la multiplicité des valeurs propres, c'est-à-dire

$$\dim E_0 = 1 \quad \text{et} \quad \dim E_1 = 2.$$

- * Or, les colonnes de M_3 vérifient $C_1 + C_2 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_0$, puis $E_0 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

* De même, les colonnes de $M_3 - I_3$ vérifient $C_1 - C_3 = 0$ et $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, donc $E_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

* Ainsi, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a la relation $M_3 = PDP^{-1}$.

- * Le polynôme caractéristique de M_4 est

$$\begin{aligned} \chi_{M_4} &= \begin{vmatrix} X+2 & -3 & -2 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + X \begin{vmatrix} X+2 & -3 \\ 1 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= -X - 2 + 2 + X(X+2)(X-1) + 3X = X(-1 + X^2 + X - 2 + 3) \\ &= X^2(X+1). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\text{Sp}(M_4) = \{0, 1\}$.

- * La matrice M_4 est donc diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est $X(X+1)$, donc si $M_4^2 = -M_4$. Le calcul du coefficient $(1, 1)$ de M_4^2 suffit à montrer que cette relation est fausse. Ainsi, M_4 n'est pas diagonalisable.
- * En développant suivant la deuxième ligne, le polynôme caractéristique de M_5 est

$$\begin{aligned} \chi_{M_5} &= (X-5) \begin{vmatrix} X-9 & 2 & -4 \\ -2 & X-4 & -2 \\ -2 & 1 & X-7 \end{vmatrix} = (X-5) \begin{vmatrix} X-9 & 2 & -4 \\ -2 & X-4 & -2 \\ 0 & 5-X & X-5 \end{vmatrix} \\ &= (X-5)^2 \begin{vmatrix} X-9 & 2 & -4 \\ -2 & X-4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (X-5)^2 \begin{vmatrix} X-9 & -2 & -4 \\ -2 & X-6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (X-5)^2 \begin{vmatrix} X-9 & -2 \\ -2 & X-6 \end{vmatrix} \\ &= (X-5)^2 (X^2 - 15X + 50) \\ &= (X-5)^3 (X-10). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\text{Sp}(M_5) = \{5, 10\}$.

- * La matrice M_5 est diagonalisable ssi $(X-5)(X-10)$ est un polynôme annulateur (ce sera alors le polynôme minimal). Or,

$$M_5 - 5I_4 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_5 - 10I_5 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Un calcul facile montre que $(M_5 - 5I_4)(M_5 - 10I_4) = 0$ (on remarquera qu'il suffit de calculer une ligne de ce produit, puisqu'elles sont toutes colinéaires, celles de $M_5 - 5I_4$ l'étant).

Ainsi, M_5 est diagonalisable.

De plus, les dimensions des sous-espaces propres sont alors égales aux multiplicités, à savoir

$$\dim(E_5) = 3 \quad \text{et} \quad \dim(E_{10}) = 1.$$

- * Les expressions précédentes montrent que les colonnes de $M_5 - 5I_4$ vérifient $C_1 + C_2 = 0$, $C_1 + 2C_3 = 0$, et $C_1 - C_4 = 0$. Ainsi, les 3 vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans E_5 , et sont linéai-

rement indépendants (car échelonnée selon leur dernière coordonnée non nulle). On en déduit que

$$E_5 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

* Les colonnes de $M_5 - 10I_4$ vérifient $2C_1 + C_3 + C_4 = 0$, donc $E_{10} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

* Ainsi, en posant $P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D_5 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, on a la relation de diagonalisation :

$$M_5 = P_5 D_5 P_5^{-1}.$$

2. Soit $D' = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}$, et $N = P D' P^{-1}$. Alors

$$N^2 = P D' P^{-1} P D' P^{-1} = P (D')^2 P^{-1} = P D P^{-1} = M_5.$$

Cela me suffit sous cette forme.

3. On cherche une base dans laquelle l'endomorphisme canoniquement associé à M_4 est de la forme donnée dans l'énoncé.

• Analyse : Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à M_4 . Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} =$

(b_1, b_2, b_3) telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alors b_1, b_2 et b_3 sont non nuls en tant qu'éléments d'une

base, et $f(b_1) = 0$, $f(b_2) = b_1$ (donc $f(b_2) \neq 0$ et $f(f(b_2)) = 0$), et $f(b_3) = -b_3$. On en déduit que $b_3 \in E_{-1}$, $b_2 \in \text{Ker}(f^2)$ mais $b_2 \notin \text{Ker}(f)$ et $b_1 = f(b_2)$.

• Synthèse :

* On calcule $M_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\text{Ker}(f^2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans

$\text{Ker}(f^2)$ mais pas dans $\text{Ker}(f)$. On pose donc $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On calcule alors $f(b_2) = A_4 b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On

pose par conséquent $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Enfin on pose $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

* La matrice des coordonnées des vecteurs (b_1, b_2, b_3) est inversible. En effet

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

en effectuant d'abord l'opération $L_1 \leftrightarrow L_3$ puis l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2 - L_1$.

Ainsi, la famille (b_1, b_2, b_3) est une base de $\mathbb{R}^3$

* D'après la description de E_0 , et l'expression de b_1 , $f(b_1) = 0$. Par définition de b_1 , $f(b_2) = b_1$. Enfin

$b_3 \in E_{-1}$, donc $f(b_3) = -b_3$. Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

* Par conséquent, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$, on a bien, d'après la formule de changement de base :

$$P_4^{-1} M_4 P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 2 – (Racines d'une matrice)

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. Il existe donc une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PDP^{-1}$. On note

$$D = \text{Diag}(\theta_1, \dots, \theta_n).$$

Tout nombre complexe θ admettant une racine ρ , on peut donc, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, définir $\rho_k \in \mathbb{C}$ tel que $\rho_k^2 = \theta$. On définit alors

$$D' = \text{Diag}(\rho_1, \dots, \rho_n).$$

On a donc $(D')^2 = D$, et donc

$$(PD'P^{-1})^2 = P(D')^2P^{-1} = PDP^{-1} = M.$$

Ainsi, la matrice $N = PD'P^{-1}$ vérifie $N^2 = M$.

2. On suppose que $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$, et que χ_M est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.

- (a) Vu la façon dont la question est posée, on attend un peu plus que simplement l'utilisation du théorème du cours (χ simplement scindé implique M diagonalisable).

On redonne rapidement mais sans entrer dans les détails, l'argument principal de la preuve. Supposons χ simplement scindé, donc

$$\chi = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i),$$

les λ_i étant 2 à 2 distincts. Donc les $(X - \lambda_i)$ sont 2 à 2 premiers entre eux, et le lemme des noyaux, ainsi que le théorème de Cayley-Hamilton, montrent que

$$\mathbb{C}^n \sim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \text{Ker } \chi_M(M) = \bigoplus_{k=1}^n E_{\lambda_k}(M).$$

Cela justifie bien la diagonalisabilité de M .

- (b) • Soit N tel que $N^2 = M$. On a alors $NM = N \cdot N^2 = N^3 = N^2N = MN$, d'où $NM = MN$.
 • Puisque N et M commutent, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(M)$, N et $M - \lambda I_n$ commutent aussi, et donc N laisse stable le noyau de $M - \lambda I_n$ (démonstration faite dans le cours, faut-il la refaire ici ?)

Donc N laisse stable les sous-espaces propres de M .

- (c) Comme χ est simplement scindé, les multiplicités de toutes les valeurs propres sont égales à 1, et donc les sous-espaces propres ne peuvent être que de dimension 1.

Soit alors $\lambda \in \text{Sp}(M)$ et $X \in E_{\lambda}(M) \setminus \{0\}$. On a donc $E_{\lambda}(M) = \text{Vect}(X)$. Par ailleurs, la question précédente montre que $NX \in E_{\lambda}M$, donc $NX \in \text{Vect}(X)$, donc il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $NX = \mu X$.

Puisque $X \neq 0$, on en déduit que μ est valeur propre, et que X est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

Ainsi, tout vecteur propre de M est aussi un vecteur propre de N . La base de $\mathbb{C}^n$ définie par la matrice de passage P est une base constituée de vecteurs propres de M (base de diagonalisation), donc aussi de vecteurs propres de N .

Ainsi, cette matrice de passage P diagonalise aussi la matrice N , et on en déduit que $P^{-1}NP$ est diagonale.

- (d) On note $D = \text{Diag}(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_k e^{-i\theta_k}, 0, \dots, 0)$, avec $r_i > 0$. Ainsi, $k = \text{rg}(D) = \text{rg}(M)$ (nécessairement égal à n ou $n - 1$, comme mentionné plus bas).

- Analyse. Une matrice N telle que $N^2 = M$ vérifie $P^{-1}MP \in D_n(\mathbb{C})$, ce qu'on écrit

$$P^{-1}MP = D' = \text{Diag}(\zeta_1, \dots, \zeta_n).$$

De plus, on a alors $(D')^2 = D$, donc les ζ_i sont des racines carrées des coefficients diagonaux de D . On en déduit que

$$D' \in \{\text{Diag}(\pm\sqrt{r_1}e^{i\frac{\theta_1}{2}}, \dots, \pm\sqrt{r_k}e^{i\frac{\theta_k}{2}}, 0, \dots, 0)\}.$$

- Synthèse. Toute matrice D' de cette forme vérifie $(D')^2 = D$, et donc en posant $N = PD'P^{-1}$, on obtient $N^2 = M$.

Ainsi, les matrices N vérifiant $N^2 = M$ sont exactement les matrices

$$N = P\text{Diag}(\pm\sqrt{r_1}e^{i\frac{\theta_1}{2}}, \dots, \pm\sqrt{r_k}e^{i\frac{\theta_k}{2}}, 0, \dots, 0)P^{-1}.$$

Ces matrices sont deux à deux distinctes, ce qu'on peut justifier soit en remarquant que $A \mapsto PAP^{-1}$ est bijective, soit en remarquant que leurs spectres sont 2 à 2 distincts.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe exactement } 2^k = 2^{\text{rg}(M)} \text{ matrices racines de } M}$

Remarquez que malgré la notation utilisée qui suggère une multiplicité possible de 0, les hypothèses faites montrent que 0 ne peut pas apparaître plus d'une fois sur la diagonale de M . Ainsi, $\text{rg}(M) = n$ ou $n - 1$.

On peut donc réexprimer le résultat de la façon suivante :

Si χ_M est simplement scindé, M a 2^n racines dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si M est inversible, et 2^{n-1} sinon.

3. On ne refait pas tout. On constate simplement que tout se passe de la même façon, à part qu'on ne pourra trouver de racines des valeurs propres que si elles sont positives. Ainsi, toujours sous l'hypothèse de scindement simple de χ_M ,

- si $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$, M admet exactement 2^n racines, obtenues en choisissant une des deux racines de chaque valeur propre ;
- si $\text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$ et $0 \in \text{Sp}(M)$, alors M admet exactement 2^{n-1} racines ;
- s'il existe $\lambda \in \text{Sp}(M)$ tel que $\lambda < 0$, alors M n'admet pas de racine (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Corrigé du problème 1 – (CCINP MP - 2023, décomposition spectrale d'un endomorphisme)

1. Un exemple -

- Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 6X + 5 = (X - 1)(X - 5).$$

Ainsi, $\boxed{\chi_A \text{ est simplement scindé, donc } A \text{ est diagonalisable}}$.

- On calcule Π_1^2 et Π_2^2 . On note par colonnes $\Pi_1 = \frac{1}{2}(C_1|C_2)$ et $\Pi_2 = \frac{1}{2}(C'_1|C'_2)$. Ainsi

$$\Pi_1^2 = \frac{1}{4}(C_1 - C_2|C_2 - C_1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \Pi_1,$$

et

$$\Pi_2 = \frac{1}{4}(C'_1 + C'_2|C'_1 + C'_2) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \Pi_2.$$

Ainsi, $\boxed{\Pi_1 \text{ et } \Pi_2 \text{ sont des matrices de projecteurs}}$.

Notamment en début de problème, arrangez-vous pour bien montrer que vous avez fait les calculs. Une rédaction du type « on vérifie que $\Pi_1^2 = \Pi_1$ » est un peu légère à ce stade de la copie pour ce type de concours.

- On calcule les expressions demandées

$$\begin{aligned}
 * \quad & \boxed{\Pi_1 + 5\Pi_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} \\
 * \quad & \boxed{\Pi_1 + \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2} \\
 * \quad & \boxed{\Pi_1 \Pi_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}}.
 \end{aligned}$$

2. Trop gentil de rappeler le théorème de décomposition des noyaux (qui est au programme). Redémonstrons-le donc, dans le cas $p = 2$, comme demandé.

On considère donc P et Q deux polynômes premiers entre eux, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe donc une relation de Bézout, c'est-à-dire un couple $(U, V) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que

$$UP + VQ = 1.$$

En spécialisant en u , on a donc :

$$U(u) \circ P(u) + V(u) \circ Q(u) = \text{id}_E.$$

- Puisque $P(u)$ et $Q(u)$ sont des endomorphismes de E , $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Ker}(Q(u))$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
- Soit $x \in \text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u))$. Ainsi,

$$P(u)(x) = 0 \quad \text{et} \quad Q(u)(x) = 0.$$

La relation de Bézout amène alors

$$x = U(u) \circ P(u)(x) + V(u) \circ Q(u)(x) = U(u)(0) + V(u)(0) = 0,$$

puisque $U(u)$ et $V(u)$ sont des endomorphismes. On en déduit que $\text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u)) = \{0\}$, donc que $\boxed{\text{la somme } \text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u)) \text{ est directe}}$.

- Si f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel E , on a de façon évidente $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ (en effet, si $f(x) = 0$, alors $g \circ f(x) = g(0) = 0$). Ainsi,

$$\text{Ker}(P(u)) \subset \text{Ker}(Q(u) \circ P(u)) = \text{Ker}((PQ)(u))$$

et de même

$$\text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}(P(u) \circ Q(u)) = \text{Ker}((PQ)(u)).$$

Par stabilité de $\text{Ker}(PQ(u))$ par somme (c'est un sous-espace vectoriel), on en déduit que

$$\boxed{\text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}(PQ(u))}.$$

- Réciproquement, soit $x \in \text{Ker}(PQ(u))$. En utilisant à nouveau la relation de Bézout, on peut écrire

$$x = x_1 + x_2,$$

où $x_1 = U(u) \circ P(u)(x)$ et $x_2 = V(u) \circ Q(u)(x)$. Puisque deux polynômes d'un même endomorphisme u commutent, on peut alors écrire

$$Q(u)(x_1) = U(u) \circ P(u) \circ Q(u)(x) = U(u) \circ (PQ)(u)(x) = U(u)(0) = 0,$$

puisque $x \in \text{Ker}(PQ(u))$. On en déduit que $x_1 \in \text{Ker}(Q(u))$.

On montre de la même manière (inutile de le refaire) que $x_2 \in \text{Ker}(P(u))$.

Ainsi, $x \in \text{Ker}(Q(u)) + \text{Ker}(P(u))$, et on a bien montré que

$$\boxed{\text{Ker}(PQ(u)) \subset \text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u))}.$$

- Les 3 points ci-dessus montrent que

$$\boxed{\text{Ker}(PQ(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))}.$$

3. Les polynômes Q_1 et Q_2 sont respectivement égaux à $P_2^{k_2}$ et $P_1^{k_1}$.

- Si $k_1 = 0$ ou $k_2 = 0$, on a clairement $Q_1 \wedge Q_2 = 1$.
- On suppose donc $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$. On suppose par l'absurde qu'il existe A un facteur irréductible de $Q_1 \wedge Q_2$. Ainsi, A divise $P_1^{k_1}$ et A divise $P_2^{k_2}$. Or, les facteurs irréductibles de $P_1^{k_1}$ sont ceux de P_1 et ceux de $P_2^{k_2}$ sont ceux de P_2 . Ainsi A est un facteur irréductible en commun à P_1 et à P_2 , ce qui contredit le fait que ces polynômes sont premiers entre eux.

Ainsi, $Q_1 \wedge Q_2$ n'admet aucun facteur irréductible, et est unitaire par définition, donc $Q_1 \wedge Q_2 = 1$.

- On en déduit que Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux. Il existe donc une relation de Bézout

$$R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1, \quad \text{avec } (R_1, R_2) \in \mathbb{C}[X].$$

4. • Soit $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$.

Par définition $P_j^{k_1} \mid Q_i$, donc Q_i peut être écrit sous la forme

$$Q_i = T_i P_j^{k_j}.$$

Ainsi,

$$p_i \circ p_j = T_i(u) \circ (P_j^{k_j} Q_j)(u) = T_i(u) \circ \pi_u(u) = 0.$$

Donc $\boxed{p_i \circ p_j = 0}$.

- En spécialisant la relation

$$R_1 Q_1 + \cdots + R_m Q_m = 1,$$

définissant les R_i , il vient directement

$$R_1(u) \circ Q_1(u) + \cdots + R_m(u) \circ Q_m(u) = \text{id}_E,$$

c'est-à-dire $\boxed{\sum_{i=1}^m p_i = \text{id}_E}$

- Enfin, en composant cette dernière égalité par p_j , il vient, pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$p_j = \sum_{i=1}^m p_i \circ p_j = p_j \circ p_j,$$

les autres termes de la somme étant nuls d'après le premier point. On en déduit que $p_j^2 = p_j$, donc

$\boxed{p_j \text{ est un projecteur}}.$

5. Les λ_i étant deux à deux distinctes, les polynômes $A_i = (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux. D'après le lemme de décomposition des noyaux, on en déduit que

$$\text{Ker}(\pi_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Ker}(A_i(u)) \quad \text{donc:} \quad \boxed{E = \bigoplus_{i=1}^n N_i},$$

puisque π_u est un polynôme annulateur de u .

6. On utilise la question 4.

- Comme les p_i sont des endomorphismes de E , on a évidemment

$$\sum_{i=1}^m \text{Im}(p_i) \subset E.$$

- Soit $x \in E$. On applique la deuxième identité de la question 4 au vecteur x :

$$x = \sum_{i=1}^m p_i(x) \in \sum_{i=1}^m \text{Im}(p_i).$$

Ainsi, $E \subset \sum_{i=1}^m \text{Im}(p_i)$.

- On montre maintenant que la somme est directe. Pour cela, on montre que 0 admet une unique décomposition. Soit $(x_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $x_i \in \text{Im}(p_i)$, et tel que

$$\sum_{i=1}^m x_i = 0.$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a, par caractérisation de l'image d'un projecteur, et par la question 4 :

$$p_j(x_j) = x_j \quad \text{et} \quad p_j(x_i) = p_j(p_i(x_i)) = 0.$$

Ainsi, en appliquant p_j à l'égalité précédente, il vient

$$0 = p_j(0) = \sum_{i=1}^m p_j(x_i) = p_j(x_j) = x_j.$$

Ainsi, tous les x_j sont nuls, ce qui montre que 0 a une unique décomposition dans la somme $\sum \text{Im}(p_i)$. Cela caractérise la somme directe.

- On en déduit donc que

$$E = \bigoplus \text{Im}(p_i).$$

7. On vérifie que pour tout $i \in p_i$, $\text{Im}(p_i) \subset N_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}$. En effet, soit $x \in \text{Im}(p_i)$. Ainsi, $p_i(x) = x$ (car p_i est un projecteur), donc :

$$\begin{aligned} (u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}(x) &= (u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i} \circ p_i(x) \\ &= (u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i} \circ Q_i(u) \circ R_i(u)(x) \\ &= (u - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i - k_i} \circ \pi_u(u) \circ R_i(u)(x) = 0, \end{aligned}$$

où k_i est la multiplicité de λ_i dans le polynôme minimal, vérifiant $k_i \leq \alpha_i$.

On a donc pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\dim(\text{Im}(p_i)) \leq \dim(N_i)$.

Or, les deux questions précédentes amènent

$$\sum_{i=1}^m \dim(N_i) = \dim E = \sum_{i=1}^m \dim(\text{Im}(p_i))$$

d'où

$$\sum_{i=1}^m \dim(N_i) - \dim(\text{Im}(p_i)) = 0.$$

On a montré juste au-dessus que tous les termes de cette somme sont positifs, donc la nullité de la somme implique que

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \dim(N_i) = \dim(\text{Im}(p_i)).$$

Les inclusions $\text{Im}(p_i) \subset N_i$, avec l'égalité des dimensions, impliquent que

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \boxed{\text{Im}(p_i) = N_i}.$$

Partie I –

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

8. Puisque u est diagonalisable, le polynôme minimal de u est simplement scindé. De plus, ses racines sont exactement les valeurs propres de u . Ainsi

$$\boxed{\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)}.$$

9. La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\pi_u}$ est de la forme

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)} = \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{X - \lambda_j}.$$

On trouve a_j en multipliant par $(X - \lambda_j)$ et en évaluant en λ_j . Ainsi,

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad a_j = \frac{1}{Q_j(\lambda_j)}.$$

On peut donc écrire la décomposition en éléments simples :

$$\boxed{\frac{1}{\pi_u(X)} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{Q_j(\lambda_j)(X - \lambda_j)}}$$

En multipliant cette égalité par π_u , il vient

$$1 = \sum_{j=1}^m \frac{1}{Q_j(\lambda_j)} Q_j.$$

Ainsi, on peut poser, pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $R_j = \frac{1}{Q_j(\lambda_j)}$ (polynôme constant), et définir les p_i avec ces polynômes.

On remarquera que les R_i ne sont pas uniques, mais en revanche, tout choix des R_i définit les mêmes p_i d'après les questions 6 et 7 de la partie I : en effet, quel que soit le choix de R_i vérifiant la relation de Bézout à m terme, p_i est la projection sur N_i parallèlement à la somme des autres.

Ainsi, le choix des $R_i = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)}$ ne restreint pas la généralité du propos, et on obtient donc

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \boxed{p_i = R_i(u) \circ Q_i(u) = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}}.$$

10. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $Q_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$. Ainsi, le polynôme

$$S = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$$

est un polynôme de degré au plus $m - 1$ (les Q_i sont tous de degré $m - 1$), et vérifie :

$$\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad S(\lambda_j) = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i Q_i(\lambda_j)}{Q_i(\lambda_i)} = \lambda_j.$$

Il prend donc les mêmes valeurs que X en m valeurs distinctes. Ainsi, par propriété de rigidité polynômiales, $S = X$, c'est-à-dire

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}}.$$

En spécialisant cette égalité en u , et d'après la question 10,

$$\boxed{u = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i}.$$

11. **Exemple :** on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Pour cette question, l'argument attendu est la symétrie de cette matrice à coefficients réels. On verra en effet très bientôt que toute matrice réelle symétrique est diagonalisable (théorème spectral). En attendant de disposer de ce théorème, on est obligé de faire quelques calculs, qui de toutes façons sont aussi demandés.

On remarque que $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $A^2 = 4I_4$.

Ainsi, $X^2 - 4 = (X - 2)(X + 2)$ est un polynôme annulateur de A . Ce polynôme annulateur étant simplement scindé, on en déduit que A est diagonalisable.

- (b) Le polynôme minimal de A divise $X^2 - 4$ et est unitaire. Il ne peut pas être 1, ni $X - 2$, ni $X + 2$ (car A n'est pas une matrice scalaire). Il est donc nécessairement

$$\pi_A = (X - 2)(X + 2) = X^2 - 4.$$

En notant $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 2$, les polynômes Q_1 et Q_2 sont donc

$$Q_1 = X - 2 \quad \text{et} \quad Q_2 = X + 2,$$

donc

$$\Pi_1 = \frac{Q_2(A)}{Q_2(-2)} = -\frac{1}{4}(A - 2I_4) \quad \text{et} \quad \Pi_2 = \frac{Q_1(A)}{Q_1(2)} = \frac{1}{4}(A + 2I_4).$$

En explicitant ces matrices, on trouve

$$\Pi_1 = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Pi_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La décomposition spectrale de A est donc

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (c) D'après la question I-4, Π_1 et Π_2 commutent, plus précisément

$$\Pi_1 \Pi_2 = \Pi_2 \Pi_1 = 0.$$

Ainsi, d'après la formule du binôme, pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$A^q = \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \lambda_1^k \Pi_1^k \Pi_2^{q-k} = \lambda_1^q \Pi_1^q + \lambda_2^q \Pi_2^q.$$

Par idempotence de Π_1 et Π_2 , pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, il vient

$$A^q = \lambda_1^q \Pi_1 + \lambda_2^q \Pi_2.$$

Cette relation reste vraie pour $q = 0$ d'après la deuxième relation de la question I-4 (ou par vérification directe dans cette situation particulière).

12. C'est une question de cours ! On redonne rapidement la démonstration.

- Tout d'abord, $\mathbb{C}[v] = \{P(v), P \in \mathbb{C}[X]\}$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, et

$$P = Q\pi_v + R,$$

la division euclidienne de P par π_v . On a donc $\deg(R) < \deg(\pi_v)$. En spécialisant en v , il vient alors

$$P(v) = R(v).$$

Ainsi, tout polynôme en v s'écrit comme polynôme en v de degré au plus $d - 1$, où $d = \deg(\pi_v)$. On en déduit que $(\text{id}, v, \dots, v^{d-1})$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}[v]$.

- Elle est également libre, car une relation non triviale fournirait un polynôme annulateur de v non nul et de degré strictement inférieur au degré de π_v , ce qui est impossible.
 - Ainsi, $(\text{id}, v, \dots, v^{d-1})$ est une base de $\mathbb{C}[v]$, donc $\mathbb{C}[v]$ est de dimension $d = \deg \pi_v$.
13. • Par définition (I-4), les projecteurs p_i sont des éléments de $\mathbb{C}[u]$.
- Montrons que $(p_1, \dots, p_m)$ est une famille libre. Pour cela, on considère $(\mu_1, \dots, \mu_m)$ une famille de scalaires, telle que

$$\sum_{i=1}^m \mu_i p_i = 0.$$

Soit $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$. En appliquant p_j , et du fait de la première relation de I-4,

$$\mu_j p_j^2 = 0,$$

et comme p_j n'est pas l'endomorphisme nul (puisque $\text{Im}(p_j) = N_j$ contient au moins le sous-espace propre associé à λ_j qui est non trivial, les racines de π_u étant des valeurs propres), on en déduit que $\mu_j = 0$.

Ceci étant vrai pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on en déduit que $(p_1, \dots, p_m)$ est une famille libre de $\mathbb{C}[u]$.

- Puisque $\deg(\pi_u) = m$, $\dim \mathbb{C}[u] = m$ d'après question 12, et donc la famille $(p_1, \dots, p_m)$ est une base de $\mathbb{C}[u]$.
14. Si on prend un endomorphisme nilpotent non nul u , le polynôme minimal est $\pi_u = X^d$. Ainsi, $m = 1$, et la famille $(p_1, \dots, p_m)$ est réduite à un élément. Or, $\mathbb{C}[u]$ contient au moins u et id , qui sont linéairement indépendants (car id n'est pas nilpotente, sauf en dimension 0, et car $u \neq 0$). Donc $\mathbb{C}[u]$ est de dimension au moins 2.

On en déduit que $(p_1) = (p_1, \dots, p_m)$ n'est pas une base de $\mathbb{C}[u]$.

15. Soit u un endomorphisme de E , $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel q on ait $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q f_i$. Par combinaison linéaire de ces identités, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a alors

$$P(u) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) f_i.$$

En particulier, en posant $P = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$, on a pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $P(\lambda_i) = 0$, donc $P(u) = 0$. Par conséquent, P est un polynôme annulateur de u , simplement scindé, donc u est diagonalisable.

Corrigé du problème 2 – Réduction de Jordan

Partie I – Réduction du problème

1. On a $u \circ (u - \lambda_i \text{id})^{\alpha_i} = (u - \lambda_i)^{\alpha_i} \circ u$, donc, pour tout $x \in \text{Ker}((u - \lambda_i \text{id})^{\alpha_i})$,

$$(u - \lambda_i \text{id})^{\alpha_i}(u(x)) = u(u - \lambda_i \text{id})^{\alpha_i}(x) = u(0) = 0.$$

Ainsi, $u(x) \in \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id})^{\alpha_i}$. On en déduit que $\text{Ker}((u - \lambda_i \text{id})^{\alpha_i})$ est stable par u .

Plus généralement, le même raisonnement prouverait que pour tous polynômes P et Q , $\text{Ker}(P(u))$ est stable par $Q(u)$. En particulier, $\text{Ker}((u - \lambda_i \text{id})^{\alpha_i})$ est aussi stable par $u - \lambda_i \text{id}$.

2. Soit A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, et $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$ le découpage de A par blocs correspondant à la décomposition de E en somme des E_i . En notant p_i la projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$, le bloc $A_{i,j}$ représente alors

$$A_{i,j} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_i} p_i \circ u|_{E_j}.$$

Or, si $i \neq j$, par stabilité des E_j par u , $\text{Im}(u|_{E_j}) \subset E_j$, donc $p_i \circ u|_{E_j} = 0$. Ainsi, tous les blocs $A_{i,j}$ situés ailleurs que sur la diagonale sont nuls. Les blocs diagonaux, quant à eux, représentent $p_i \circ u|_{E_i}$ (c'est-à-dire u_i)

relativement à la base $\mathcal{B}_i$; on a la représentation par blocs :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u_2)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}_k}(u_k)} \end{pmatrix}$$

3. Puisque $E_i = \text{Ker}((u - \lambda_i \text{id})^{\alpha_i})$, pour tout $x \in E_i$, $v_i^{\alpha_i}(x) = 0$. Ainsi, l'endomorphisme $v_i^{\alpha_i}$ de E_i est nul. On en déduit que v_i est nilpotent.
4. Si tout endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie admet une décomposition de Jordan, alors les v_i admettent une décomposition de Jordan. Ainsi, il existe une base $\mathcal{B}_i$ relativement à laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}_i}(v_i)$ est

diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant une matrice de Jordan de diagonale nulle $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, dans cette base, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_i)$ est également diagonale par blocs, chaque bloc étant une matrice de Jordan

de diagonale λ_i : $\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$.

La question 2 nous assure alors que dans la base obtenue par concaténation des $\mathcal{B}_i$, la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant une matrice de Jordan ; il peut y avoir plusieurs blocs de même diagonale λ_i (et de taille éventuellement différentes), correspondant aux différents blocs de la décomposition de u_i .

Ainsi, si le résultat est acquis pour les endomorphismes nilpotents,

tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie admet une réduction de Jordan.

Partie II – Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent

1. Argument classique. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ tels que

$$\lambda_0 x + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0.$$

Supposons les λ_i non tous nuls. Soit i le plus petit indice tel que $\lambda_i \neq 0$. En composant par u^{p-1-i} , il vient alors :

$$\lambda_i u^{p-1} + \lambda_{i+1} u^p + \cdots + \lambda_{p-1} u^{2p-2-i}(x) = 0$$

Comme $u^p = 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$, il vient

$$\lambda_i u^{p-1}(x) = 0 \quad \text{puis:} \quad \lambda_i = 0,$$

d'où une contradiction. Ainsi, les λ_i sont tous nuls, ce qui signifie que :

la famille $(u^{p-1}(x), u^{p-2}(x), \dots, u(x), x)$ est libre.

On note F le sous-espace engendré par cette famille.

2. Il suffit de montrer que l'image par u des éléments de la base $(u^{p-1}(x), \dots, u(x), x)$ de F est dans F . Or, pour tout $i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $u(u^i(x)) = u^{i+1}(x) \in F$, puisqu'il s'agit d'un autre élément de la base si $i \neq p-1$, et de $0 \in F$ si $i = p-1$. Ainsi, F est stable par u .

3. Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

- La somme est directe car $u^{p-k}(x) \notin \text{Ker}(u^{k-1})$, puisque $u^{p-1}(x) \neq 0$.
- Clairement et classiquement, $\text{Ker}(u^{k-1}) \subset \text{Ker}(u^k)$, et $u^k(u^{p-k}(x)) = u^p(x) = 0$, donc $\text{Vect}(u^{p-k}(x)) \subset \text{Ker}(u^k)$.

Ainsi : $\boxed{\text{Ker}(u^{k-1}) \oplus \text{Vect}(u^{p-k}(x)) \subset \text{Ker}(u^k)}$

4. Soit S_p un supplémentaire de $\text{Ker}(u^{p-1}) \oplus \text{Vect}(x)$ dans $\text{Ker}(u^p)$. On a alors :

$$\text{Ker}(u^{p-2}) \oplus \text{Vect}(u(x)) \oplus u(S_p) \subset \text{Ker}(u^{p-1}).$$

En effet :

- La première somme est directe d'après la question précédente.
- Soit $y \in (\text{Ker}(u^{p-2}) \oplus \text{Vect}(u(x))) \cap u(S_p)$. Il existe donc $x_1 \in \text{Ker}(u^{p-2})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, et $x_2 \in S_p$ tels que

$$y = x_1 + \lambda u(x) \quad \text{et} \quad y = u(x_2), \quad \text{donc:} \quad u(x_2) = x_1 + \lambda u(x).$$

En appliquant u^{p-2} , il vient donc :

$$u^{p-1}(x_2) = \lambda u^{p-1}(x).$$

Or, u^{p-1} est injective sur $S_p \oplus \text{Vect}(x)$, supplémentaire de $\text{Ker}(u^{p-1})$ dans $\text{Ker}(u^p) = E$, et x_2 et x sont dans $S_p \oplus \text{Vect}(x)$. Ainsi, $x_2 = \lambda x$. Comme $S_p \cap \text{Vect}(x) = \{0\}$, on en déduit que $x_2 = 0$, puis $y = 0$.

Ainsi, la somme $\text{Ker}(u^{p-2}) \oplus \text{Vect}(u(x)) \oplus u(S_p)$ est directe.

- On a $\text{Ker}(u^{p-2}) \oplus \text{Vect}(u(x)) \subset \text{Ker}(u^{p-1})$ d'après la question précédente, et $u(S_p) \subset \text{Ker}(u^{p-1})$ (car $u^p = 0$).
Donc

$$\text{Ker}(u^{p-2}) \oplus \text{Vect}(u(x)) \oplus u(S_p) \subset \text{Ker}(u^{p-1}).$$

Soit T_{p-1} un supplémentaire de $\text{Ker}(u^{p-2}) \oplus \text{Vect}(u(x)) \oplus u(S_p)$ dans $\text{Ker}(u^{p-1})$. On a donc

$$\text{Ker}(u^{p-2}) \oplus \text{Vect}(u(x)) \oplus u(S_p) \oplus T_{p-1} = \text{Ker}(u^{p-1}),$$

donc, $\boxed{S_{p-1} = T_{p-1} \oplus u(S_p)}$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(u^{p-2}) \oplus \text{Vect}(u(x))$ dans $\text{Ker}(u^{p-1})$ contenant $u(S_p)$.

5. Le raisonnement est le même. Supposons $S_p, \dots, S_{k+1}$ construits.

- On a $\text{Ker}(u^{k-1}) \oplus \text{Vect}(u^{p-k}) \subset \text{Ker}(u^k)$ d'après la question 3.
- Soit $y \in (\text{Ker}(u^{k-1}) \oplus \text{Vect}(u^{p-k})) \cap u(S_{k+1})$. Il existe $x_1 \in \text{Ker}(u^{k-1})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x_2 \in S_{k+1}$ tels que

$$y = u(x_2) = x_1 + \lambda u^{p-k}(x).$$

En appliquant u^{k-1} à cette égalité, il vient

$$u^k(x_2) = u^k(\lambda u^{p-k-1}(x)).$$

Or, u^k est injective sur $S_{k+1} \oplus \text{Vect}(u^{p-k-1})$ (car cet espace est en somme directe avec $\text{Ker}(u^{k+1})$, d'après la construction de S_{k+1}). Ainsi, $x_2 = \lambda u^{p-k-1}(x)$. Comme $S_{k+1} \cap \text{Vect}(u^{p-k-1}(x)) = \{0\}$, il vient $x_2 = 0$, puis $y = 0$.

Ainsi, la somme $\text{Ker}(u^{k-1}) \oplus \text{Vect}(u^{p-k}) \oplus u(S_{k+1})$ est directe.

- Comme $S_{k+1} \subset \text{Ker}(u^{k+1})$, on a $u(S_{k+1}) \subset \text{Ker}(u^k)$. Les autres inclusions ayant déjà été montrées, il vient donc :

$$\text{Ker}(u^{k-1}) \oplus \text{Vect}(u^{p-k}) \oplus u(S_{k+1}) \subset \text{Ker}(u^k).$$

Soit T_k un supplémentaire de $\text{Ker}(u^{k-1}) \oplus \text{Vect}(u^{p-k}) \oplus u(S_{k+1})$ dans $\text{Ker}(u^k)$ et $S_k = T_k \oplus u(S_{k+1})$.

Alors $\boxed{S_k}$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(u^{k-1}) \oplus \text{Vect}(u^{p-k})$ dans $\text{Ker}(u^k)$, contenant $u(S_{k+1})$.

6. Soit $T = S_1 + \dots + S_p$.

- Par définition de S_1 , on a $\text{Vect}(u^{p-1}(x)) \oplus S_1 = \text{Ker}(u)$.
- On a ensuite $\text{Ker}(u) \oplus \text{Vect}(u^{p-2}(x)) \oplus S_2 = \text{Ker}(u^2)$, donc d'après le point précédent :

$$\text{Vect}(u^{p-1}(x), u^{p-2}(x)) \oplus S_1 \oplus S_2 = \text{Ker}(u^2).$$

- Plus généralement, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\text{Vect}(u^{p-1}(x), \dots, u^{p-k}(x)) \oplus S_1 \oplus \dots \oplus S_k = \text{Ker}(u^k).$$

En effet, si le résultat est acquis pour $k-1 \geq 1$, il vient :

$$\begin{aligned} & \text{Vect}(u^{p-1}(x), \dots, u^{p-k}(x)) \oplus S_1 \oplus \dots \oplus S_k \\ &= \text{Vect}(u^{p-1}(x), \dots, u^{p-k+1}(x)) \oplus S_1 \oplus \dots \oplus S_{k-1} \oplus \text{Vect}(u^{p-k}(x)) \oplus S_k \\ &= \text{Ker}(u^{k-1}) \oplus \text{Vect}(u^{p-k}(x)) \oplus S_k = \text{Ker}(u^k). \end{aligned}$$

- En particulier, pour $k = p$, on trouve que $\boxed{T \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } E = \text{Ker}(u^p)}$.
- Par ailleurs,

$$u(T) \subset u(S_1) + \dots + u(S_p) \subset \{0\} + S_1 + \dots + S_{p-1} \subset T.$$

Ainsi, $\boxed{T \text{ est stable par } u}$.

7. On montre alors le résultat par récurrence forte sur la dimension n de l'espace E .

Lorsque $\dim E = 0$, il n'y a rien à montrer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que tout endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$ -ev de dimension $k < n$ admet une décomposition de Jordan. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$ -ev E de dimension n , d'indice de nilpotence p . Soit $x \notin \text{Ker}(u^{p-1})$, et F et T construits comme ci-dessus. Alors F et T sont des sous-espaces stables par u . Soient u_1 et u_2 les endomorphismes de F et T induits par u .

- Comme $\dim(F) > 0$, on a $\dim(T) < n$, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à T : il existe une base $\mathcal{B}_2$ de T relativement à laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u_2)$ est diagonale par bloc, chaque bloc étant une matrice de Jordan de diagonale nulle.
- On ne peut pas appliquer l'hypothèse de récurrence à F (car rien n'assure que $\dim(F) < n$: T peut être nul). En revanche, il est facile de trouver une base relativement à laquelle la matrice de u_1 est une matrice de Jordan : $\mathcal{B}_1 = (u^{k-p}(x), \dots, u(x), x)$.
- Soit $\mathcal{B}$ la juxtaposition des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Alors la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_1) & 0 \\ \hline 0 & \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u_2) \end{array} \right).$$

D'après les deux points précédents, cette matrice est constituée de blocs diagonaux égaux à des matrices de Jordan, ce qui achève la preuve.

Ainsi, $\boxed{\text{toute matrice nilpotente admet une réduction de Jordan.}}$