1

Suites numériques – rappels et compléments

Nous rappelons dans ce chapitre les définitions et propriétés importantes sur les suites, ainsi que quelques aspects techniques et calculatoires en fin de chapitre. Il s'agit essentiellement de révisions du cours de MPSI, mais nous profitons de ce chapitre de révision pour introduire des notions fondamentales en analyse, comme les notions topologiques.
L'objectif n'est pas de refaire le cours de MPSI, mais uniquement des rappels. Ainsi, en particulier, les démonstrations, et les exemples de base sont à reprendre dans votre cours de MPSI. Certaines démonstrations importantes seront néanmoins reprises rapidement.
Nous rappelons que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

I Topologie réelle et complexe

I.1 Intervalles

Définition 1.1.1 – Intervalle de $\mathbb{R}$

Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble convexe I de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire tel que :

$$\forall (a,b) \in I^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b \Longrightarrow x \in I.$$

On rappelle que la propriété de la borne supérieure permet de décrire tous les intervalles :

Théorème 1.1.2 – Inventaire des intervalles réels

Tout intervalle I de $\mathbb{R}$ est d'une des formes suivantes, pour certaines valeurs réelles a et b :

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$, $a \leqslant b$;
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$, $a < b$;
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\}$, $a < b$;
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\}$, $a < b$;
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant a\}$;
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x > a\}$;
- $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant b\}$;
- $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$;
- $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$;
- $\varnothing$.

◁ **Éléments de preuve.**

Si I est non vide, sa borne inférieure a et sa borne supérieure b existent (éventuellement infinies). Montrer, par la propriété de convexité, que $]a,b[\subset I \subset [a,b]$. ▷

Remarques 1.1.3

1. Cette propriété est spécifique à $\mathbb{R}$. Par exemple, elle est fausse dans $\mathbb{Q}$ (avec $a, b \in \mathbb{Q}$).
2. La définition et le théorème s'étendent à $\overline{\mathbb{R}}$. Puisque $+\infty$ et $-\infty$ sont des éléments particuliers de $\mathbb{R}$, on a besoin de moins de cas pour décrire tous les intervalles : $[a, b]$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$, avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. L'ensemble vide est par exemple obtenu en considérant $]0, 0[$, alors que $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ et $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.
   La seule différence avce les intervalles de $\mathbb{R}$ est la possibilité d'inclure les bornes infinies.

I.2 Voisinages

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La notation $|z|$ désignera donc suivant le cas soit la valeur absolue dans $\mathbb{R}$, soit le module dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.4 – Voisinage dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Soit $a \in \mathbb{K}$, et $V \subset \mathbb{K}$. On dit que V est un voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{K}, \quad |y - x| < \varepsilon \Longrightarrow y \in V,$$

c'est-à-dire $B(a, \varepsilon) \subset V$, où $B(a, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - a| < \varepsilon\}$ (boule ouverte de centre a et de rayon ε.
On note $\mathcal{V}(a) \subset \mathcal{P}(\mathbb{K})$ l'ensemble des voisinages de a.

Définition 1.1.5 – Voisinage de $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$

Soit $V \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
- On dit que V est un voisinage de $+\infty$ si et seulement s'il existe b tel que $]b, +\infty[\subset V$.
- On dit que V est un voisinage de $a = -\infty$ si et seulement s'il existe b tel que $]-\infty, b[\subset V$.

On note $\mathcal{V}(+\infty)$ et $\mathcal{V}(-\infty)$ l'ensemble des voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ respectivement.

Proposition 1.1.6 – Caractérisation des voisinages de $\mathbb{R}$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{R}$. Alors $V \in \mathcal{V}(a)$ si et seulement s'il existe un intervalle ouvert I tel que

$$a \in I \subset V.$$

Proposition 1.1.7 – Union et intersection de voisinages

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ou $a \in \mathbb{C}$. Soit $I \neq \varnothing$, et $(V_i)_{i \in I}$ une famille de voisinages de a (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ selon le cas). Alors :

1. $\bigcup_{i \in I} V_i$ est un voisinage de a
2. Si I est fini, $\bigcap_{i \in I} V_i$ est un voisinage de a.

Exemple 1.1.8

Donner un exemple de famille de voisinages de 0 dans $\mathbb{R}$ dont l'intersection n'est pas un voisinage de 0.

Terminologie 1.1.9 – Propriété au voisinage de a

On dit qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ dépendant d'un élément $x \in \mathbb{K}$ est vérifiée au voisinage de a s'il existe

$V \in \mathcal{V}(a)$ telle que pour tout $x \in V$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Par exemple, dire qu'une fonction f est continue au voisinage de a signifie qu'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, f soit continue en x, donc tel que f soit continue sur V.

II Convergence

II.1 Convergence, réexpression topologique

On rappelle les définitions suivantes :

Définition 1.2.1 – limite d'une suite, convergence, divergence

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in B(\ell, \varepsilon).$$

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{K}$, on dit qu'elle est convergente.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucun ℓ de $\mathbb{K}$ comme limite, alors on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente (dans $\mathbb{K}$).

Si (u_n) admet une limite ℓ, on dit aussi que (u_n) tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$, et on écrira

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n, \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

On pourra omettre $n \to +\infty$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la variable.

Définition 1.2.2 – Limite infinie d'une suite réelle

Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle.

- (u_n) admet la limite $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\quad \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n \geqslant N,\quad u_n \geqslant A.$$

- (u_n) admet la limite $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\quad \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n \geqslant N,\quad u_n \leqslant A.$$

On note respectivement $\lim u_n = +\infty$ et $\lim u_n = -\infty$.

On rappelle le résultat suivant, qui permet de donner un sens à la notation $\lim u_n$.

Théorème 1.2.3 – Unicité de la limite

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. Si elle existe, la limite de (u_n) est unique.

◁ **Éléments de preuve.**

Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux limites (non infinies) distinctes de (u_n), considérer $\varepsilon = |\ell_2 - \ell_1|$ dans les définitions pour obtenir une contradiction.

Discuter les cas infinis de façon similaire. ▷

Pour ne pas avoir constamment à traiter le cas d'une limite infinie de façon particulière, on donne une traduction topologique de la définition de la limite d'une suite, valide tout aussi bien pour des limites finies ou infinies.

Proposition 1.2.4 – Caractérisation topologique de la limite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $a \in \mathbb{K}$ (ou éventuellement $a = \pm\infty$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Alors les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $u_n \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} a$

(ii) $\forall V \in \mathcal{V}(a),\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in V$.

On termine cette section par une propriété importante des suites d'entiers.

Proposition 1.2.5 – Suites convergentes à valeurs entières

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. La suite (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire (*i.e.* constante à partir d'un certain rang).

◁ **Éléments de preuve.**

Réciproque évidente. Sens direct : considérer $\varepsilon < \frac{1}{2}$. ▷

II.2 Rappel des propriétés opératoires relatives à la convergence

Les règles opératoires usuelles sur les limites vous sont en général bien connues :

Théorème 1.2.6 – Opérations sur les limites finies

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes convergentes, et λ et μ deux scalaires (réels ou complexes). Alors :

1. $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et $\lim |u_n| = |\lim u_n|$;
2. $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et $\lim(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim u_n + \mu \lim v_n$;
3. $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et $\lim(u_n v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$;
4. si $\lim v_n \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang ; ainsi, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang, est convergente, et $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$.

Théorème 1.2.7 – Opérations impliquant des limites infinies

Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles, les résultats ci-dessus restent vrais si la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et/ou de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infinie, avec les règles arithmétiques suivantes (règles usuelles dans $\overline{\mathbb{R}}$) :

$$a + \infty = +\infty; \qquad +\infty + \infty = +\infty; \qquad a \cdot (+\infty) = (\mathrm{sg}(a))\infty \ (\text{pour } a \neq 0);$$

$$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = \pm\infty; \qquad \frac{1}{\pm\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0^+} = +\infty, \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Avertissement 1.2.8 – Formes indéterminées

En revanche, les opérations arithmétiques suivantes ne sont pas définies, et donnent des formes indéterminées (ayez des exemples en tête) :

$$\infty - \infty; \qquad 0 \cdot \infty; \qquad \frac{\infty}{\infty}; \qquad \frac{0}{0}$$

Aux règles précédentes, nous ajoutons la suivante :

Proposition 1.2.9 – Produit $0 \times$ borné

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

La continuité de l'exponentielle et du logarithme (ou une propriété de composition des limites, pour les cas infinis non indéterminés) permet d'obtenir les règles d'exponentiation :

Proposition 1.2.10 – Passage à la limite pour les puissances

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, (u_n) étant de plus strictement positive. On suppose que $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, et que $(\ell, \ell') \notin \{(+\infty, 0), (0, 0), (1, +\infty), (1, -\infty)\}$. Alors :

$$u_n^{v_n} \longrightarrow \ell^{\ell'}.$$

Dans cette proposition, les règles d'exponentiation ont été étendues par les opérations suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$:

- $a^{+\infty} = 0$ si $a \in [0, 1[$,
- $a^{+\infty} = +\infty$ si $a \in]1, +\infty]$
- $a^{-\infty} = +\infty$ si $a \in [0, 1[$,
- $a^{-\infty} = 0$ si $a \in]1, +\infty]$,
- $0^b = 0$ si $b \in]0, +\infty]$.

Avertissement 1.2.11 – Formes indéterminées pour les puissances

On notera les formes indéterminées relatives aux exponentiations :

$$\infty^0, \qquad 0^0 \qquad \text{et} \qquad 1^\infty.$$

II.3 Comportement des limites vis-à-vis des inégalités

Les suites considérées dans cette section sont réelles. Pour les suites complexes, l'utilisation de résultats de ce type nécessite de séparer les études de la partie réelle et de la partie imaginaire.

Théorème 1.2.12 – Conservation des inégalités larges

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant v_n$. Alors, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

◁ **Éléments de preuve.**

Par l'absurde. ▷

Avertissement 1.2.13

Les inégalités strictes ne se conservent pas !

Théorème 1.2.14 – Théorème de convergence par encadrement

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, trois suites réelles, et $N \in \mathbb{N}$, tels que : $\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers une même limite finie, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi, et

$$\lim v_n = \lim u_n = \lim w_n.$$

Remarque 1.2.15

C'est avant tout un théorème d'existence de la limite. La valeur vient en bonus. Ne pas le rédiger comme un double passage à la limite dans les deux inégalités, qui ne justifie pas correctement cette existence.

Théorème 1.2.16 – Théorème de divergence par minoration ou majoration

Soit $(u_n)n \in \mathbb{N}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Le théorème de minoration s'utilise parfois en comparant à des suites dont on connaît bien la nature, par exemple les suites géométriques. La divergence ou la convergence des suites géométriques étant rapide, cela ne s'applique toutefois que pour des suites ayant un comportement assez marqué.
Voici une façon assez commode de faire une comparaison à une suite géométrique. Elle permet également de comparer les séries associées (critère de d'Alembert).

Méthode 1.2.17 – Comparaison à une suite géométrique

- Étudier l'existence et le cas échéant la valeur de $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.
- En cas d'existence, notons $\ell = \lim \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$.
  - Si $\ell < 1$, on peut majorer à partir d'un certain rang $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite géométrique de raison $r \in]\ell, 1[$, et on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
  - Si $\ell > 1$, on peut minorer à partir d'un certain rang $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite géométrique de raison $r \in]1, \ell[$, donc $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
  - Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemples 1.2.18

Limite de $\frac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{C}$.

II.4 Propriétés des suites monotones

Théorème 1.2.19 – Théorème de la convergence monotone

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

De plus, dans le cas croissant, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Définition 1.2.20 – Suites adjacentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si :

1. l'une est croissante et l'autre décroissante ;
2. $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Théorème 1.2.21 – Théorème des suites adjacentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes. Alors :

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$,

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \ell| \leqslant |v_n - u_n|$.

III Comparaisons asymptotiques

Proposition/Définition 1.3.1 – Domination

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $\exists M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant M|v_n|$

(ii) il existe une suite (μ_n) et $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = \mu_n v_n$, et (μ_n) est bornée

Si ces propriétés sont satisfaites, on dit que (u_n) est dominée par (v_n), et on note $u_n = O(v_n)$.

Proposition/Définition 1.3.2 – Négligeabilité

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \varepsilon|v_n|$;

(ii) il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un entier n_0 tels que :

$$\forall n \geqslant n_0,\quad u_n = \varepsilon_n v_n \qquad \text{et} \qquad \lim \varepsilon_n = 0.$$

Si ces propriétés sont satisfaites, on dit que (u_n) est négligeable devant (v_n), et on note $u_n = o(v_n)$.

Définition 1.3.3 – Équivalence

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites *équivalentes* s'il existe une suite (α_n) et un entier n_0 tels que

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n = \alpha_n v_n \qquad \text{et} \qquad \lim \alpha_n = 1.$$

On note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ou $u_n \sim v_n$.

La propriété suivante permet d'écrire une équivalence sous forme d'un développement asymptotique, ce qui s'avère très souvent pratique d'un point de vue technique, pour contourner certains problèmes techniques liés aux équivalents (sommes, compositions)

Proposition 1.3.4 – Caractérisation de l'équivalence par la négligeabilité

$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$.

Remarque 1.3.5

Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, ces propriétés peuvent être caractérisées par l'étude de $\dfrac{v_n}{u_n}$:

- $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ bornée $\iff\ u_n = O(v_n)$;
- $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow 0 \iff u_n = o(v_n)$;
- $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1 \iff u_n \sim v_n$.

On rappelle les règles de manipulation suivantes, qui se démontrent facilement avec le point de vue séquentiel (la deuxième caractérisation).

Propriétés 1.3.6 – Transitivités strictes et larges de o et O

1. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$.
2. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
3. Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

4. Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.

Propriétés 1.3.7 – sommes de o et O

1. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
2. Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n + v_n = O(w_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n + v_n = O(w_n)$.
4. Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = O(w_n)$.

Propriétés 1.3.8 – produits de o et O

1. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(x_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
2. Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = o(x_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
3. Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = O(x_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
4. Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(x_n)$, alors $u_n v_n = O(w_n x_n)$.
5. En particulier, $u_n = w_n o(x_n) \iff u_n = o(w_n x_n)$ et $u_n = w_n O(x_n) \iff u_n = O(w_n x_n)$.
   (Les o et O sont multiplicatifs : on peut rentrer ou sortir un facteur multiplicatif).

Proposition 1.3.9 – Équivalents de produits, quotients, puissances

Soit (u_n), (v_n), (u'_n) et (v'_n) quatre suites réelles.

1. Si $u_n \sim u'_n$ et $v_n \sim v'_n$, alors $u_n v_n \sim u'_n v'_n$.
2. Si de plus v_n est non nulle à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{u'_n}{v'_n}$.
3. Si $u_n \sim u'_n$ et si a est un réel fixé, alors $(u_n)^a \sim (u'_n)^a$.

Avertissement 1.3.10

- Ne pas sommer des équivalents (problème de compensation de la partie principal)
- Ne pas composer des équivalents par une fonction.

Exemples 1.3.11

Donner des contre-exemples pour ces deux avertissements.

Pour conourner ces problèmes, revenir à des techniques de développements limités ou asymptotiques. Enfin, deux propriétés importantes des équivalents :

Théorème 1.3.12 – Conservation des limites par équivalence

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et sa limite est ℓ.

Proposition 1.3.13 – Conservation du signe

Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. Alors il existe n_0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$, u_n et v_n soient de même signe.

Et pour terminer, la piqûre de rappel des équivalents classiques. Je les donne sous leur version fonctionnelle, ce qui signifie ici qu'on peut remplacer x par n'importe quelle suite convergeant vers 0 (les équivalents classiques étant tous donnés au voisinage de 0).
Ne pas hésiter sur ces équivalents !

Proposition 1.3.14 – Équivalents classiques

1. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$;
2. $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$;
3. $(1+x)^a - 1 \underset{0}{\sim} ax \quad (a \neq 0)$;
4. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$;
5. $\cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$;
6. $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$;
7. $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{\sim} x$;
8. $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$;
9. $\mathrm{th}(x) \underset{0}{\sim} x$;
10. $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{0}{\sim} x$;
11. $\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$;

Et un petit dernier qui a un statut un peu particulier, car spécifique aux suites et ne découlant pas de techniques de dérivation :

Théorème 1.3.15 – Formule de Stirling

On a : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

IV Suites récurrentes

Nous terminons ce chapitre par quelques rappels sur les propriétés et l'étude de certaines suites récurrentes.

IV.1 Suites récurrentes linéaires

Définition 1.4.1 – Suites récurrentes linéaires

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que (u_n) est une *suite récurrente linéaire d'ordre* k si (u_n) vérifie une relation du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = a_{k-1,n}u_{n+k-1} + \cdots + a_{1,n}u_{n+1} + a_{0,n}u_n.$$

où $((a_{0,n}), \ldots, (a_{(k-1,n)})) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^k$.

Une suite récurrente d'ordre k est entièrement déterminée par sa relation de récurrence et la donnée de ses k premiers termes. Plus précisément :

Théorème 1.4.2 – Structure et dimension de l'ensemble des SRL

Soit, pour $i \in [\![0, k-1]\!]$, $(a_{i,k}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = a_{k-1,n}u_{n+k-1} + \cdots + a_{1,n}u_{n+1} + a_{0,n}u_n.$$

Alors $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{S} & \longrightarrow \mathbb{C}^k \\ (u_n) & \longmapsto (u_0, \ldots, u_{k-1}) \end{cases}$$

est un isomorphisme. En particulier, $\mathcal{S}$ est de dimension k.

Dans le cas où les suites $(a_{i,n})$ sont constantes, on parle de suite récurrente linéaire d'ordre k à coefficients constants. On dispose dans ce cas de techniques d'explicitation, grâce aux racines du polynôme caractéristique.

Définition 1.4.3 – Polynôme caractéristique d'une récurrence linéaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire à coefficients constants, de relation

$$u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_1u_{n+1} + a_0u_n \quad \textit{i.e.} \quad u_{n+k} - a_{k-1}u_{n+k-1} - \cdots - a_1u_{n+1} - a_0u_n = 0$$

Le *polynôme caractéristique* associé à la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le polynôme

$$\chi(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \cdots - a_1X - a_0.$$

Théorème 1.4.4 – Explicitation des SRL, HP si $n \geqslant 2$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites (u_n) vérifiant une relation de récurrence linéaire dont le polynôme caractéristique est χ. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines de χ (dans $\mathbb{C}$), de multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ respectivement. Alors $\mathcal{S}$ est l'ensemble des suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{i=1}^{p} P_i(n)\lambda_i^n,$$

où pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $P_i \in \mathbb{C}_{\alpha_i-1}[X]$.

◁ **Éléments de preuve.**

Hors-programme dans le cas général. Voir cours de MPSI pour le cas particulier $k \leqslant 2$ (ou adapter celle-ci). La preuve utilise des polynômes d'endomorphisme. Reprenez-là lorsque vous serez un peu plus à l'aise sur le sujet.

- Considérer $\chi(D)$ où D est l'opérateur qui à (u_n) associe (u_{n+1}), et le factoriser. On est ramené à l'étude de $(D - \lambda_i\mathrm{Id})^{\alpha_i}((P_i(n)\lambda_i^n))$, et on remarque qu'à chaque itération, le degré du polynôme diminue strictement. Cela prouve que ces suites sont bien solutions.
- La réciproque se fait par un argument de dimension, en montrant que les $(n^j\lambda_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $j < \alpha_i$, forment une famille libre (par exemple en exploitant un équivalent en $+\infty$).

▷

IV.2 Suites récurrentes linéaires perturbées

Une suite récurrente linéaire perturbée est une suite définie par une récurrence qui ressemble à une récurrence linéaire, à laquelle on ajoute une perturbation sous forme d'une suite (b_n). Ainsi, elle vérifie une relation du type :

$$(E) \ : \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} - \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,n}u_{n+i} = b_n.$$

On note également (EH) la relation de récurrence homogène associée (obtenue en remplaçant b_n par 0).

Théorème 1.4.5 – Structure de l'ensemble des SRL perturbées

L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites vérifiant la relation de récurrence (E) est un espace affine dirigé par l'espace $\mathcal{S}_H$ des suites vérifiant (EH). Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution particulière, toute autre suite (v_n) vérifiant (E) vérifiera

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n + w_n, \quad (w_n) \in \mathcal{S}_H.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Il s'agit d'une fibre de l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ défini par $(u_n) \mapsto u_{n+k} - \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,n}u_{n+i}$ ▷

Proposition 1.4.6 – Explicitation d'une SRL perturbée par $(P(n)\lambda^n)$

Soit (EH) une relation de récurrence linéaire à coefficients constants, de polynôme caractéristique χ, et (E) la relation correspondante, perturbée par $(b_n) = P(n)\lambda^n$. Alors il existe une solution particulière de (E) de la forme

$$u_n = n^\alpha Q(n)\lambda^n,$$

où $\alpha = \mathrm{mult}_\chi(\lambda)$ et $\deg(Q)) \leqslant \deg(P)$.

◁ **Éléments de preuve.**
Hors-programme. Encore une fois, utiliser $\chi(D)$. ▷

Remarque 1.4.7

1. La résolution des suites arithmético-géométriques $u_{n+1} = au_n+b$, $a \neq 1$, est un cas particulier de ces deux résultats plus général : il existe une solution constante c, vérifiant $c = ac + b$. C'est donc le point fixe. La solution générale s'écrit alors sous la forme $\lambda a^n + c$.
2. Avant cela, la résolution des suites arithmétiques $u_{n+1} = u_n+a$ en est aussi un cas particulier : la proposition donne l'existence d'une solution particulière sous la forme cn (il faut multiplier par n car 1 est racine de multiplicité 1 du polynôme caractéristique). En remplaçant, on trouve facilement $c = a$. La solution générale est alors $\lambda 1^n + an$, et on ajuste avec les termes initiaux.

Exemple 1.4.8

Un exemple un peu moins trivial. Expliciter (u_n) tel que

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n + (n+1)2^n.$$

IV.3 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

On rappelle ici les grands principes d'étude des systèmes dynamiques discrets, c'est-à-dire des suites récurrentes non linéaires d'ordre 1, du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où f sera supposée continue sur une partie D de $\mathbb{R}$.

Méthode 1.4.9 – Étude d'une suite récurrente

- Justifier la bonne définition de la suite, par exemple en exhibant un intervalle stable (voir ci-dessous)
- Étudier l'existence de la limite : étudier la monotonie, et obtenir l'existence de la limite à l'aide par exemple du théorème de la limite monotone.
- Une fois assurée l'existence de la limite, déterminer les valeurs possibles de cette limite ℓ en passant à la limite dans la relation de récurrence :

  Si f est continue, soit ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, soit ℓ est un bord ouvert du domaine de f.
- Déterminer, parmi l'ensemble des valeurs possibles de ℓ laquelle est la bonne.
- Déterminer les points fixes de f peut déjà s'avérer utile pour la première étape (aide à la recherche d'intervalles stables, de majorants et de minorants). Commencer par cela peut être efficace.

Un objet incournable dans l'étude des suites récurrentes est :

Définition 1.4.10 – Intervalle stable

On dit qu'un intervalle I est stable par f si f est définie sur I (i.e. $I \subset D_f$) et $f(I) \subset I$.

Théorème 1.4.11 – CS pour que (u_n) soit bien définie

Si I est un intervalle stable par f, et si $u_0 \in I$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

◁ **Éléments de preuve.**

Montrer par récurrence que u_n est défini, et $u_n \in I$. Comme I est dans le domaine, on peut alors continuer. ▷

Évidemment, si on parvient à trouver un indice N tel que u_N soit dans un intervalle stable, on parvient à la même conclusion.
Les intervalles stables permettent aussi souvent d'étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La situation la plus simple est la suivante (et assez facile à détecter graphiquement) :

Proposition 1.4.12 – Étude des variations lorsque $f - \mathrm{id}$ est de signe constant

Supposons $f - \mathrm{id}$ de signe constant sur un intervalle stable I, et $u_0 \in I$. Alors (u_n) est monotone, de sens de monotonie déterminé par le signe de $f - \mathrm{id}$.

◁ **Éléments de preuve.**

D'après ce qui précède, pour tout n, $u_n \in I$. Appliquer f pour comparer u_{n+1} à u_n. ▷

Proposition 1.4.13 – Étude des variations lorsque f est croissante

Supposons f croissante sur un intervalle stable I, et $u_0 \in I$ (peut s'adapter si on n'a pas cette inclusion dès le rang initial). Alors (u_n) est monotone. On trouve le sens de monotonie en comparant u_0 et u_1.

◁ **Éléments de preuve.**

Tout d'abord, tous les termes u_n sont dans I. On peut alors propager par récurrence l'inégalité initiale entre u_0 et u_1, en appliquant la fonction croissante f. ▷

Proposition 1.4.14 – Étude des variations lorsque f est décroissante

Supposons f décroissante sur un intervalle stable I, et $u_0 \in I$ (peut s'adapter si on n'a pas cette inclusion dès le rang initial). Alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens de monotonie opposé. On trouve les sens de monotonie en comparant u_0 et u_2.

◁ **Éléments de preuve.**

Appliquer le résultat précédent à $f \circ f$, décrivant la récurrence associée aux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). ▷

Remarque 1.4.15

Ainsi, si f est décroissante sur un intervalle stable, les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de variation opposés. Cela ne suffit pas pour prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Pour cela, il faut encore s'assurer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont même limite. Les limites de ces deux suites sont à rechercher parmi les points fixes de $f \circ f$. Si $f \circ f$ a deux points fixes distincts, on peut très bien avoir convergence de (u_{2n}) vers l'un des deux et de (u_{2n+1}) vers l'autre. Essayez de construire un exemple graphique.

Avertissement 1.4.16

Les points fixes de f sont point fixes de $f \circ f$, mais il peut exister des points fixes de $f \circ f$ qui ne sont pas points fixes de f.

Exemple 1.4.17

Étude de la suite $u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = u_n^2 - u_n$.

Pour terminer, nous donner deux résultats hors-programme, mais à savoir refaire, permettant l'étude de la vitesse de convergence (c'est-à-dire estimant le comportement asymptotique de la suite, soit sous forme d'une domination, soit sous forme d'un équivalent).

Proposition 1.4.18 – Vitesse de convergence en un point fixe attractif, HP

Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, et soit $a \in I$ un point fixe de f tel que $|f'(a)| < 1$.

1. Alors il existe ε tel que s'il existe n_0 tel que $|u_{n_0} - a| < \varepsilon$, alors $u_n \to a$. On dit que a est un point fixe attractif.
2. Si tel est le cas, on a alors, pour tout $k \in]|f'(a)|, 1[$, $u_n = O(k^n)$.

Le deuxième résultat s'applique lorsque $f'(a) = 1$. Dans ce cas, il est clair graphiquement que la convergence sera beaucoup plus lente. On peut, sous réserve quelques hypothèses supplémentaires, trouver un équivalent de (u_n). Plutôt que de donner un résultat tout finalisé, nous donnons ici plutôt une méthode. Nous avons besoin pour cela d'un lemme archi-classique, probablement vu en MPSI déjà.

Lemme 1.4.19 – Théorème de la moyenne de Cesàro, cas convergent

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe, et

$$\forall n \geqslant 1, \quad M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_n$$

la suite de ses moyennes. Alors si (u_n) converge vers ℓ, (M_n) aussi.

Méthode 1.4.20 – Equivalent de (u_n) convergeant vers a tel que $f'(a) = 1$

- Sous des hypothèses permettant de mener les calculs à leurs termes (hypothèses que je ne donne pas explicitement), trouver α tel que

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha\left(\left(\frac{f(u_n)}{u_n}\right)^\alpha - 1\right)$$

admette une limite finie non nulle. On pourra pour cela faire un développement limité de f au voisinage de a, ou utiliser des équivalents classiques.
- Le théorème de Cesàro permet alors d'obtenir, par télescopage, un équivalent de $u_n^\alpha - u_0^\alpha$, duquel on déduit un équivalent de (u_n).

Exemple 1.4.21

Donner un équivalent de la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.