3
Espaces vectoriels normés

Le but de ce chapitre est d'introduire un cadre qui permettra de généraliser l'analyse réelle de première année au cas de fonctions définies d'un espace vectoriel vers un autre. En particulier, la notion importante à la base de la notion de limite (et à partir de là, de continuité et de dérivabilité) est la notion de convergence d'une suite.

On aimerait donc donner un cadre rigoureux à l'étude de la convergence de suites dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si cet espace est de dimension finie, il suffit d'étudier la convergence coordonnée par coordonnée relativement à une base fixée. On verra dans un chapitre ultérieur que la propriété de convergence ne dépend alors pas du choix de la base. Ainsi, dans ce contexte, toute notion « raisonnable » de convergence équivaut à la convergence coordonnée par coordonnée.

Lorsque E n'est pas de dimension finie, les choses sont beaucoup moins claires, et nécessitent de revenir à l'intuition et la définition de la convergence, en terme d'approximation : une suite réelle ou complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, si et seulement si, pour toute qualité d'approximation $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang, u_n est presque égal à ℓ, à ε près. Cette définition nécessite de mesurer une distance de u_n à ℓ.

Pour généraliser cette définition, nous introduisons la notion de norme sur un espace vectoriel, permettant de définir ensuite une distance. Beaucoup de notions d'analyse réelle (notamment dans un premier temps d'analyse séquentielle) se généralisent alors dans le cadre des espaces vectoriels normés (c'est-à-dire munis d'une norme). On montrera par exemple dans le chapitre suivant des généralisations de certaines propriétés des fonctions continues, rencontrées dans le cadre de fonctions réelles : le théorème des bornes atteintes, le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de Heine par exemple.

Nous ferons remarquer dans la dernière partie (HP) qu'il est possible de définir directement une notion plus générale de distance, sans passer par une norme, ce qui est suffisant pour pouvoir définir de façon satisfaisante la notion de convergence.

I Normes sur un espace vectoriel

Dans toute cette partie $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 3.1.1 – Norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $N : E \to \mathbb{R}_+$ une application à valeurs réelles positives. On dit que N est une norme si et seulement si N vérifie les propriétés suivantes :

(i) (séparation) pour tout $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$;

(ii) (homogénéité) pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;

(iii) (inégalité triangulaire) pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

La propriété de positivité est en fait redondante, mais ce n'est généralement pas la plus dure à montrer dans les situations concrètes.

Proposition 3.1.2

Soit $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les points *(i)*, *(ii)* et *(iii)* de la propriété précédente. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $N(x) \geqslant 0$ (et par conséquent, N est une norme).

◁ **Éléments de preuve.**
Considérer $N(x + (-x))$ et appliquer les trois points. ▷

Définition 3.1.3 – Espace vectoriel normé

- Un espace vectoriel normé E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E muni d'une norme $N : E \to \mathbb{R}_+$.
- Cette norme sera souvent notée $\|\cdot\|$. Ainsi, pour $x \in E$, $\|x\|$ désignera la norme de x.

Exemples 3.1.4

- Si $E = \mathbb{K}$, $|\cdot|$ est une norme.
- Si $E = \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est une norme.

Le deuxième exemple est un cas particulier d'une situation plus générale déjà croisée en première année.

Proposition 3.1.5 – Norme euclidienne

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. Pour tout x, on note

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Alors $\|\cdot\|$ est une norme sur E, appelée norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

◁ **Éléments de preuve.**
Pour l'inégalité triangulaire, développer d'un côté $\langle x + y, x + y\rangle$, d'un autre $(\|x\| + \|y\|)^2$ et comparer les deux. ▷

Proposition 3.1.6 – Inégalités triangulaires

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors :

1. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$.
2. Pour tout $(x, y) \in E^2$, $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$

Lemme 3.1.7 – Transfert d'une norme

Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels, et N une norme sur F. Alors l'application N' définie sur E par

$$N'(x) = N(\varphi(x))$$

est une norme sur E.

◁ **Éléments de preuve.**
Vérifications faciles par linéarité, et caractérisation de l'injectivité par le noyau. ▷

Corollaire 3.1.8 – Restriction d'une norme

Soit N une norme sur E, et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors la restriction N_F de N à F est une norme sur F.
Ainsi, tout sous-espace vectoriel d'un e.v.n. est muni d'une structure d'e.v.n. par restriction de la norme de E.

I.2 Normes sur des espaces de dimension finie

Proposition/Définition 3.1.9 – Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Soit, pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\|X\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \qquad \|X\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|.$$

Alors $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes.

◁ **Éléments de preuve.**
Le seul point un peu délicat est l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On peut se ramener au cas réel en considérant le vecteur $\tilde{X} = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$. On peut aussi adapter la démonstration du cas réel, en définissant un produit « hermitien » :

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i},$$

où $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz se généralise à cette situation, et l'inégalité triangulaire en découle, comme dans le cas réel. ▷

Remarque 3.1.10

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique.
2. Un même espace vectoriel peut être muni de plusieurs normes ! Comme la notion de convergence est définie à l'aide des normes, elle peut être fortement dépendant du choix de la norme. Ainsi, une suite peut très bien converger pour une norme et pas pour une autre. On verra des exemples en exercice.

Par transfert, on en déduit :

Proposition/Définition 3.1.11 – Normes usuelles sur un espace de dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$. Pour $X \in E$ tel que $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on définit :

$$\|X\|_{\mathcal{B},1} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|X\|_{\mathcal{B},2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \qquad \|X\|_{\mathcal{B},\infty} = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base, on notera simplement $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

Avertissement 3.1.12

Toute norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel n'est pas euclidienne. Par exemple, $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas euclidienne.

◁ **Éléments de preuve.**
La formule de polarisation donne l'unique candidat à être le produit scalaire associé. Trouver un défaut de bilinéarité. ▻

I.3 Normes sur des espaces de fonctions

On rappelle que si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, alors tout ensemble de fonctions E^A défini sur un ensemble quelconque A et à valeurs dans E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On peut chercher alors à définir des normes sur cet espace ou sur des sous-espaces vectoriel de cet espace. Dans un premier temps, nous nous intéressons au sous-espace $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$ de $\mathbb{K}^{[a,b]}$, toujours avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'intégration correspondant à une sommation continue, les exemples précédents s'adaptent bien dans le cadre de fonctions continues.

Proposition/Définition 3.1.13 – Normes sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$

Pour tout $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$, on définit

$$\|f\|_1=\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t,\qquad \|f\|_2=\sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t},\qquad \|f\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]} f(t).$$

Alors $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes, appelées respectivement :

- norme de la convergence en moyenne pour $\|\cdot\|_1$;
- norme de la convergence en moyenne quadratique pour $\|\cdot\|_2$;
- Norme de la conevrgence uniforme, ou norme norme infinie pour $\|\cdot\|_\infty$.

◁ **Éléments de preuve.**
Même type de démonstration que dans le cas de la dimension finie ▻

Remarque 3.1.14

1. Ces normes s'étendent-elle au cas des fonctions continues par morceaux ? (la réponse n'est pas forcément la même suivant les normes).
2. Dans la définition de $\|\cdot\|_\infty$, le sup est-il un max ?

La norme $\|.\|_\infty$ peut être définie dans un contexte beaucoup plus général.

Définition 3.1.15 – Parties bornées, applications bornées

Soit A un ensemble quelconque, $(E,\|.\|)$ un e.v.n., et B une partie quelconque de E.

(i) On dit que B est bornée s'il existe un réel $M\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x\in B$, $\|x\|\leqslant M$.

(ii) On dit qu'une application $f\in E^A$ est bornée si son image $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-ensemble borné de E, c'est-à-dire s'il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x\in A,\quad \|f(x\|\leqslant M.$$

On note $\mathcal{B}(A,E)$ l'ensemble des applications bornées de A dans E.

Proposition 3.1.16 – Structure de $\mathcal{B}(A,E)$

L'ensemble $\mathcal{B}(A,E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition/Définition 3.1.17 – Norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(A,E)$

Soit A un ensemble quelconque et $(E,\|\cdot\|)$ un e.v.n.. Pour tout $f \in \mathcal{B}(A,E)$, on définit

$$\|f\|_\infty = \sup_{a\in A} \|f(a)\|.$$

L'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(A,E)$, appelée norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(A,E)$.

◁ **Éléments de preuve.**
Même preuve que dans le cas $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$. ▷

I.4 Normes sur $\mathbb{K}[X]$

Suivant qu'on s'intéresse à des propriétés algébriques liées aux coefficients, ou analytiques liées aux valeurs de la fonction polynomiale associée, on peut adopter différentes normes sur l'espace des polynômes. En particulier, les normes définies sur $\mathbb{K}^n$ s'adaptent bien, du fait que, même si $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie, les polynômes ont un nombre fini de coefficients non nuls.

Ainsi, pour $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ (somme en réalité finie), on peut définir

$$\|P\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|, \qquad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}, \qquad \|P\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Et dans un contexte plus analytique, on peut définit les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ associées aux fonctions polynomiales définies par les polynômes formels.

Remarque 3.1.18

La définition des normes séquentielles ci-dessus s'étend à certains sous-espaces de l'espace des suites $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ (les sous-espaces permettant d'assurer la bonne définition de ces normes).

I.5 Normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{n^2}$ (par exemple en mettant les unes au dessus des autres les colonnes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Via cet isomophisme, les normes usuelles de $\mathbb{K}^{n^2}$ se transfèrent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour une matrice $A = (a_{i,j})$, on obtient les normes

$$\|A\|_1 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|, \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^2}, \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|.$$

Remarque 3.1.19

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme $\|\cdot\|_2$ est associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, défini par
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} b_{i,j}.$$
2. Ces 3 définitions s'étendent aux matrices rectangulaires $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

3. Dans le cas de matrices carrées, comparer $\|AB\|$ et $\|A\| \cdot \|B\|$ pour ces différentes normes

Définition 3.1.20 – Norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelée *norme matricielle* si elle est sous-multiplicative, *i.e.* :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|.$$

Proposition 3.1.21 – Existence d'une norme matricielle, HP

Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont matricielles, la normes $\|\cdot\|_\infty$ ne l'est pas.

◁ **Éléments de preuve.**

- La matrice constituée uniquement de 1 est un contre-exemple pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$
- Le cas de $\|\cdot\|_2$ résulte de l'inégalité de CS. Ce résultat est classique (nombreux exercices) mais pas au programme. La démonstration doit donc être connue.

▷

L'existence d'une norme matricielle est d'une grande utilité dans l'étude de convergences de séries matricielles par exemple, notamment des séries faisant intervenir des puissances d'une matrice A. C'est le cas par exemple de la série exponentielle, permettant de définir l'exponentielle d'une matrice carrée :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Nous justifierons ultérieurement que cette série est convergente (indépendamment de la norme choisie). L'un des points clés (outre l'équivalence des normes en dimension finie) sera de pouvoir majorer $\|A^n\|$ par $\|A\|^n$, pour pouvoir se ramener à la convergence d'une série numérique.
Nous définirons dans le chapitre suivant une autre norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $|||A|||$, et appelée *norme triple*, ou *norme d'opérateur*.

I.6 Produits d'e.v.n.

Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur des espaces de dimension finie ont été définies à partir des modules des coordonnées, c'est à dire d'une norme particulière sur $\mathbb{K}$. On peut alors généraliser ces constructions en remplaçant des coordonnées sur $\mathbb{K}$ par des composantes vectorielles, à condition de disposer de normes sur chacune des composantes. On obtient de la sorte des normes sur des produits cartésiens d'e.v.n..

Proposition/Définition 3.1.22 – Produit cartésien d'e.v.n.

Soit $((E_i, N_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie d'e.v.n.. Pour $X = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, on définit

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n N_i(x_i), \qquad \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n N_i(x_i)^2} \qquad \text{et} \qquad \|X\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} N_i(x_i).$$

Ce sont des normes. La norme $\|\cdot\|_\infty$ ainsi définie est appelée norme produit des normes N_i.

◁ **Éléments de preuve.**

Adaptation facile du cas de $\mathbb{K}^n$. ▷

Remarque 3.1.23

La notation $\|\cdot\|_\infty$ n'indique que la dernière couche de la définition de la norme. Les normes internes utilisées sur chaque composante peuvent ne pas être des normes infinies.

II Topologie d'un espace vectoriel normé

II.1 Distance et boules

Définition 3.2.1 – Distance associée à une norme

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., et $(x, y) \in E$. On définit la distance de x à y par :

$$d(x, y) = \|y - x\|.$$

Proposition 3.2.2 – Propriétés de la distance

La distance $d : E^2 \to \mathbb{R}$ vérifie :

(i) (séparation) pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) (symétrie) pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) (inégalité triangulaire) pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$;

(iv) (positivité) pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) \geqslant 0$.

Remarque 3.2.3

- La propriété (iv) découle des 3 autres.
- Les propriétés (i) à (iii) ci-dessus (et donc aussi (iv)) permettent de définir des distances sur des ensembles beaucoup plus généraux (qui n'ont pas besoin d'être des espaces vectoriels).

Dans ce qui suit, on se place dans un e.v.n. E, dont la norme sera notée $\|\cdot\|$, et la distance associée sera notée d.

Définition 3.2.4 – Boules ouvertes, boules fermées, sphère

Soit $a \in E$, et $r \in \mathbb{R}_+$

(i) La boule ouverte de centre a et de rayon r est définie par $B(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\}$;

(ii) La boule fermée de centre a et de rayon r est définie par $\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) \leqslant r\}$;

(iii) La sphère de centre a et de rayon r est définie par $S(a, r) = \{y \in E \quad d(x, a) = r\}$.

Pour lever une éventuelle ambiguïté, cela arrive d'utiliser la notation $\mathring{B}(a, r)$ pour désigner la boule ouverte $B(a, r)$.

Exemples 3.2.5

1. Les boules dans $\mathbb{R}^2$ au sens de la norme $\|\cdot\|_2$ sont représentées dans la figure 3.1. Essayez de représenter de la même façon les boules pour la norme $\|\cdot\|_1$ et la norme $\|\cdot\|_\infty$, et observez qu'un boule n'est pas toujours ronde !
2. À quoi ressemble la boule $B(f, \varepsilon)$, pour $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$?

Exemple 3.2.6

Dans $\mathbb{R}$, les boules sont des intervalles (voir figure 3.2) :

- $B(x, r) =]x - r, x + r[$
- $\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$

En fait, tout intervalle borné ouvert est une boule ouverte, tout intervalle borné fermé est une boule fermée :

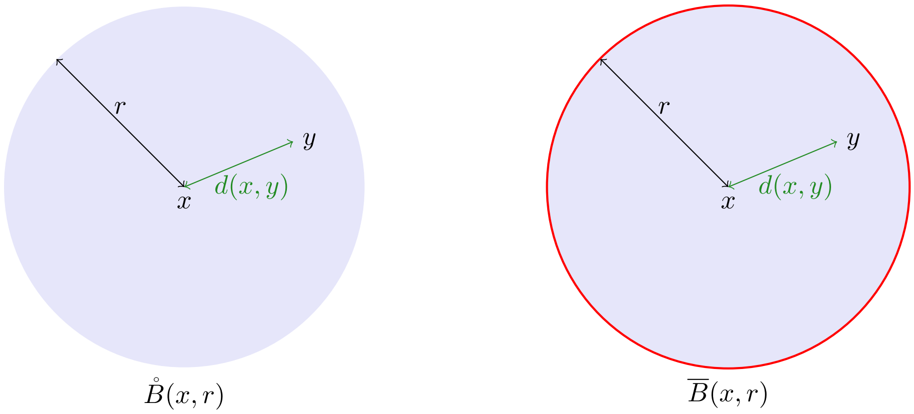

FIGURE 3.1 – Boules dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$

- $]a,b[= B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$,
- $[a,b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$

FIGURE 3.2 – Boule ouverte, boule fermée dans $\mathbb{R}$

Proposition 3.2.7 – Caractérisation des parties bornées

(i) Une boule est bornée.

(ii) Une partie A de E est bornée si et seulement s'il existe $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+$ tel que $A \subset B(a,r)$.

◁ **Éléments de preuve.**
Utiliser l'inégalité triangulaire. Faire un dessin ! ▷

L'inégalité triangulaire implique également une autre propriété des boules, bien visible sur tous les exemples étudiés : la convexité (au sens géoémtrique).

Définition 3.2.8 – Ensemble convexe, figure 3.3

Soit F une partie E. On dit que F est convexe si et seulement si pour tout couple de points A et B de E, le segment $[AB] = \{(1-t)A + tB,\ t \in [0,1]\}$ est entièrement inclus dans E.

Exemple 3.2.9

Par définition, les intervalles sont les sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$.

Théorème 3.2.10 – Convexité des boules

Pour tout $a \in E$ et $r > 0$, $\mathring{B}(a,r)$ et $\overline{B}(a,r)$ sont des parties convexes de E.

◁ **Éléments de preuve.**
Encore un petit coup d'inégalité triangulaire. ▷

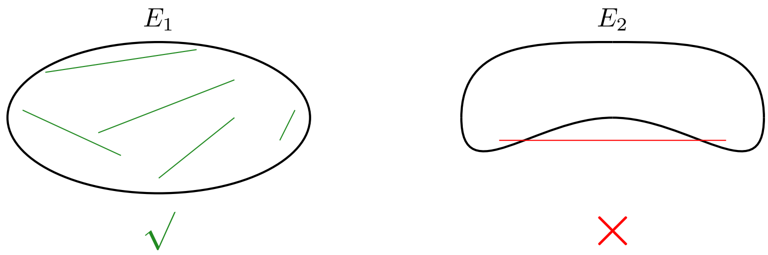

Figure 3.3 – Un sous-ensemble convexe E_1 et un sous-ensemble non convexe E_2 de $\mathbb{R}^2$

II.2 Ouverts, fermés, voisinages

La notion de boule est très mesurée. Nous définissons maintenant des objets un peu similaires, permettant d'assurer la présence de « matière » de toute part d'un point a, mais sans être aussi mesuré. Ainsi, il s'agit d'une notion plus qualitative que la notion très quantitative de boule. L'ensemble E est toujours un e.v.n., muni de sa norme $\|\cdot\|$ et de sa distance d.

Définition 3.2.11 – Voisinage, figure 3.4

Soit $a \in E$. Un *voisinage* V de a est un sous-ensemble V de E tel qu'il existe une boule ouverte centrée en a entièrement contenue dans V :

$$\exists \varepsilon > 0,\ B(a,\varepsilon) \subset V, \qquad \text{i.e.} \qquad \exists \varepsilon > 0,\ \forall x \in E,\ d(x,a) < \varepsilon \Longrightarrow x \in V.$$

On note $\mathcal{V}(a) \subset \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des voisinages de a.

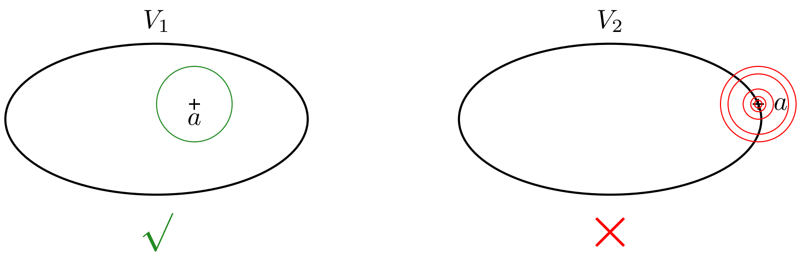

Figure 3.4 – Voisinage de a

En gros, V est un voisinage de x si x est « à l'intérieur de V », et non sur un bord. En s'éloignant un peu de x, on ne sort pas de V.

Exemple 3.2.12 – Voisinages dans $\mathbb{R}$

- Dans $\mathbb{R}$, un voisinage de x est un ensemble contenant un intervalle $]a,b[$ tel que $x \in]a,b[$.
- Par extension et commodité, on dit parfois qu'un ensemble contenant un intervalle $]a,+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$. Version symétrique pour $-\infty$. On notera $\mathcal{V}(+\infty)$ l'ensemble des voisinages de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.2.13 – Intersection et union de voisinages

Soit $(V_i)_{i\in I} \in \mathcal{V}(a)^I$ une famille de voisinages de a.

(i) Soit $V \in \mathcal{V}(a)$ et $W \in \mathcal{P}(E)$ tel que $V \subset W$. Alors $W \in \mathcal{V}(a)$.

(ii) En particulier, si $I \neq \varnothing$, $\displaystyle\bigcup_{i\in I} V_i \in \mathcal{V}(a)$.

(iii) Si I est fini, $\bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}(a)$.

Exemple 3.2.14

Trouver dans $\mathbb{R}$ un exemple de famille infinie de voisinages de $a \in \mathbb{R}$ dont l'intersection n'est pas un voisinage de a.

Définition 3.2.15 – Partie ouverte

- Un *ouvert* U de E est une partie U de E qui est voisinage de tous ses points
- De manière équivalente, $U \subset E$ est un ouvert ssi :

$$\forall x \in U,\ \exists \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \subset U.$$

Intuitivement, un ouvert est un ensemble dont le « bord » est flou : on peut s'en approcher, mais jamais l'atteindre en restant dans U. Ainsi, l'image qu'il faut en garder est qu'un ouvert est un ensemble ne contenant pas son bord. Évidemment, n'ayant pas défini la notion de bord, ceci reste une image.

Définition 3.2.16 – Partie fermée

Un sous-ensemble F de E est *fermé* si son complémentaire $\complement_E F$ est ouvert.

Cette fois, intuitivement, c'est le complémentaire qui ne contient pas son bord, donc F, lui contient tout son bord.

Exemples 3.2.17

1. Les intervalles ouverts sont des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$.
2. Les intervalles fermés sont des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}$.
3. Les intervalles semi-ouverts ne sont ni ouverts ni fermés.
4. $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont des sous-ensembles à la fois fermés et ouverts de $\mathbb{R}$.
5. On peut montrer que les sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$ sont les unions disjointes d'intervalles ouverts (voir exercices)

Définition 3.2.18 – Topologie

La *topologie* d'un e.v.n. E est la donnée de l'ensemble $\mathcal{O}$ de tous ses ouverts.

La propriété suivante généralise l'observation faite sur les intervalles.

Proposition 3.2.19 – Propriétés topologiques des boules

1. Les boules ouvertes $\mathring{B}(a, r)$ sont des parties ouvertes de E.
2. Les boules fermées $\overline{B}(a, r)$ sont des parties fermées de E.
3. Les sphères $S(a, r)$ sont des parties fermées de E.

Proposition 3.2.20 – union, intersection d'ouverts et de fermés

1. Toute union quelconque d'ouverts est un ouvert ;
2. Toute intersection d'un nombre *fini* d'ouverts est un ouvert ;
3. Toute intersection quelconque de fermés est un fermé ;
4. Toute union d'un nombre *fini* de fermés est un fermé.

◁ **Éléments de preuve.**

1. Si x est dans l'union, il existe une boule centrée en x restant dans l'un des ouverts, donc dans leur union.
2. Prendre le minimum des rayons des boules centrées en x restant dans chaque ouvert. Pourquoi doit-on se limiter au cas fini ?
3. Par complémentation
4. De même.

▷

Exemples 3.2.21

Voici deux contre-exemples à bien garder en tête :

1. Contre-exemple pour une intersection infinie d'ouverts : $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left]-\frac{1}{n},1\right[= [0,1[$.
2. Contre-exemple pour une union infinie de fermés : $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n},1\right] =]0,1]$.

Proposition 3.2.22 – Propriétés topologiques d'un produit cartésien

Soit $((E_i,N_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie d'e.v.n.. On munit le produit cartésien $E = E_1\times\cdots\times E_n$ de la norme produit.

1. Soit, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, U_i un ouvert de E_i. Alors $U_1\times\cdots\times U_n$ est un ouvert de E.
2. Soit, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, F_i un fermé de E_i. Alors $F_1\times\cdots\times F_n$ est un fermé de E.

II.3 Intérieur, adhérence, frontière

Définition 3.2.23 – Intérieur

Soit A une partie de l'e.v.n. E.

(i) Un point $a\in E$ est *intérieur* à A s'il existe $\varepsilon>0$ tel que $B(a,\varepsilon)\subset A$.

(ii) L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$, est la partie de E constituée de tous les points intérieurs à A :

$$\mathring{A} = \{a\in E \mid \exists\varepsilon>0,\quad B(a,\varepsilon)\subset A\}.$$

Proposition 3.2.24 – Caractérisation topologique de l'intérieur

Soit A une partie de E ;

(i) $\mathring{A}\subset A$;

(ii) $\mathring{A}$ est un ouvert de E ;

(iii) Si U est un ouvert de A tel que $U\subset A$, alors $U\subset\mathring{A}$.

Ces trois propriétés peuvent être résumées en disant que $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de E inclus dans A.

Corollaire 3.2.25 – Intérieur d'un ouvert

(i) Si A est ouvert, $\mathring{A}=A$. C'est même une équivalence.

(ii) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

Exemples 3.2.26

1. Décrire l'intérieur d'un intervalle.
2. Décrire $\overset{\circ}{\overline{B}(a,r)}$?
3. Justifier que $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing$. A-t-on $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$?

Définition 3.2.27 – Adhérence

Soit A une partie de E.

(i) Un point a est adhérent à A si pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

(ii) L'adhérence $\overline{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A :

$$\overline{A} = \{a \in E \mid \forall \varepsilon > 0,\ B(a, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing\}.$$

L'adhérence est donc l'ensemble des points qui « collent » à A, dans le sens où on peut en trouver des points de A arbitrairement proches.

Exemples 3.2.28

1. Décrire $\overline{\mathbb{Q}}$. A-t-on $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?
2. Que dire de l'adhérence d'un intervalle de $\mathbb{R}$?
3. Décrire $\overline{\mathring{B}(a,r)}$
4. Soit $F = \{x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}, \quad n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que la fonction nulle est adhérente à F pour la norme $\|\cdot\|_1$ mais pas pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
5. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(A)$ sont adhérents à A.

Lemme 3.2.29 – Lien avec l'intérieur

Soit $A \subset E$. Alors

- $\overline{A} = (\mathring{\widehat{A^c}})^c$, où X^c désigne le complémentaire de X dans E ;
- $(\overline{A})^c = \mathring{\widehat{A^c}}$
- $(\overline{A})^c = \mathring{\widehat{A^c}}$

Proposition 3.2.30 – Caractérisation topologique de l'adhérence

Soit $A \subset E$. Alors $\overline{A}$ est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) tel que $A \subset \overline{A}$. Autrement dit :

(i) $\overline{A}$ est un fermé

(ii) $A \subset \overline{A}$

(iii) Si F est un fermé tel que $A \subset F$, alors $\overline{A} \subset F$.

On donne une autre caractérisation en terme de distance. Pour cela, on définit dans un premier temps la distance d'un point à une partie.

Définition 3.2.31 – Distance à une partie

Soit A une partie non vide de E. Soit $x \in E$. On définit la distance de x à A par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|y - x\|_E$$

Proposition 3.2.32 – Caractérisation de l'adhérence par la distance

Soit $A \subset E$. Alors
$$\overline{A} = \{x \in E \mid d(x, A) = 0\}.$$

Propriétés 3.2.33 – Propriétés relatives aux intersections et unions

Ces propriétés ne sont pas explicitement marquées au programme, mais assez utiles. Soit $A \subset E$.

1. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$, mais l'inclusion réciproque peut être fausse.
4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, mais l'inclusion réciproque peut être fausse.

Définition 3.2.34 – Frontière

Soit $A \subset E$. La frontière de A, notée $\mathrm{Fr}(A)$, est
$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \backslash \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

Il s'agit donc des points arbitrairement proche de points de A et de points qui ne sont pas dans A.

Exemples 3.2.35

1. Quelle est la frontière de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$?
2. Quelle est la frontière de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$?
3. Déterminer la frontière de $\mathring{B}(a, r)$. Quelle est la frontière de $\overline{B}(a, r)$?
4. De façon générale, étant donné $A \subset E$, a-t-on $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(\overline{A})$? A-t-on $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(\mathring{A})$?

Définition 3.2.36 – Parties denses

(i) Soit A et B deux parties de E. On dit que A est dense dans B si $B \subset \overline{A}$.
Autrement dit, A est dense dans B ssi :
$$\forall b \in B,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ d(a, b) < \varepsilon.$$

(ii) Soit A une partie de E. On dit que A est partout dense si $\overline{A} = E$ (ce qui équivaut donc à dire que A est dense dans E.

Proposition 3.2.37 – Lien avec la densité dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) A est (partout) dense dans $\mathbb{R}$;

(ii) pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, il existe $x \in A$ tel que $a < x < b$.

Exemples 3.2.38

1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est partout dense (dans $\mathbb{R}$). Il est dense dans $[0, 1]$.
2. $\mathrm{Esc}([a, b], \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, ainsi que dans $\mathcal{C}^0_m([a, b], \mathbb{R})$ (espace des fonctions continues par morceaux).
3. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

II.4 Topologie relative

Définition 3.2.39 – Voisinages relatifs

Soit $A \subset E$, et $a \in A$. Un voisinage relatif de a dans A est une partie $V \subset A$ telle qu'il existe $V_0 \in \mathcal{V}(a)$ tel que $V = V_0 \cap A$.

Exemple 3.2.40

1. On se place dans l'e.v.n. $\mathbb{C}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $]a-1, a+1[$ est un voisinage relatif de a dans $\mathbb{R}$, mais ce n'est pas un voisinage de a dans $\mathbb{C}$
2. On se place dans l'e.v.n. $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $[a, a+1[$ est un voisinage relatif de a dans $[a, +\infty[$.

Terminologie 3.2.41 – Voisinage à droite, voisinage à gauche

Dans l'e.v.n. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, un voisinage relatif de a dans $[a, +\infty[$ est parfois appelé voisinage à droite de a.
De même, un voisinage à gauche de a est un voisinage relatif de a dans $]-\infty, a]$.

Proposition 3.2.42 – Caractérisation des voisinages relatifs

Soit $V \subset A \subset E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- V est un voisinage relatif de a dans A ;
- il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A \cap B(a, \varepsilon) \subset V$;
- il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $d(x, a) < \varepsilon \Longrightarrow a \in V$.

Proposition/Définition 3.2.43 – Ouverts relatifs

Soit $A \subset E$, et $U \subset A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) U est un voisinage relatif de tous ses points dans A ;

(ii) pour tout $a \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A \subset U$;

(iii) il existe un ouvert U_0 de E tel que $U = A \cap U_0$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que U est un ouvert relatif de A.

Exemples 3.2.44

1. Décrire les ouverts relatifs convexes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
2. Que dire des ouverts relatifs de A si A est ouvert ?
3. Montrer que A et $\varnothing$ sont toujours des ouverts relatifs de A.

Proposition/Définition 3.2.45 – Fermés relatifs

Soit $A \subset E$, et $F \subset A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A \backslash F$ est un ouvert relatif de A ;

(ii) il existe F_0 un fermé de E tel que $F = A \cap F_0$.

Lorsque ces propriétés sont vérifiées, on dit que F est un fermé relatif de A.

Exemples 3.2.46

1. Que dire des fermés relatifs de A lorsque A est fermé ?
2. Montrer que A et $\varnothing$ sont toujours des fermés relatifs de A.

Théorème 3.2.47 – Union, intersection d'ouverts, fermés relatifs

1. Une union quelconque d'ouverts relatifs de A est un ouvert relatif de A.
2. Une intersection finie d'ouverts relatifs de A est un ouvert relatif de A.
3. Une union finie de fermés relatifs de A est un fermé relatif de A.
4. Une intersection quelconque de fermés relatifs de A est un fermé relatif de A

III Convergences

III.1 Suites convergentes

Les notions de convergence vues pour les suites réelles et complexes se généralisent sans peine au cas des suites à valeurs dans un evn.

Proposition/Définition 3.3.1 – Convergence d'une suite d'éléments d'un e.v.n.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un e.v.n. E, et $\ell \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) (point de vue métrique) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$.

(ii) (réexpression du point de vue métrique) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \in B(\ell, \varepsilon)$.

(iii) (point de vue topologique) $\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \in V$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que (u_n) converge vers ℓ, ou que (u_n) admet ℓ comme limite.

Remarque 3.3.2

Dans le point (i), l'inégalité $\|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon$ peut être exprimée indifféremment avec une inégalité large ou stricte, sans que cela ne modifie le sens de la propriété. C'est ce que suggère l'équivalence avec le point (ii).

Théorème 3.3.3 – Unicité de la limite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un e.v.n. E. Si (u_n) admet une limite, alors cette limite est unique.

Cette unicité permet de définir sans ambiguïté LA limite d'une suite (en cas d'existence).

Notation 3.3.4 – Limite d'une suite

Si (u_n) converge vers ℓ, on écrira $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, ce qui est défini sans ambiguïté en vertu du théorème précédent.

Exemples 3.3.5

1. Quelle est la limite, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, de la suite $(A_n) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^n$ par
$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 2 + \frac{1}{n+1} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Quelle est la limite dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur les coefficients, de la suite définie

pour $n \geqslant 0$ par

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\binom{n}{k}} X^k$$

3. Quelle est la limite pour la norme de la convergence en moyenne sur $[0,1]$ de la suite

$$f_n : x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}.$$

Cette suite admet-elle une limite pour la norme de la convergence uniforme ?

Ainsi, la notion de convergence est fortement dépendante de la norme (en tout cas en dimension infinie).

Proposition 3.3.6 – Convergent implique borné

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si (u_n) est convergente, alors elle est bornée.

Proposition 3.3.7 – Caractérisation de la convergence dans un produit cartésien

Soit $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des e.v.n., et $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ le produit cartésien, muni de la norme produit. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = (x_{1,n}, \dots, x_{p,n}).$$

Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $(x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k.

En particulier, on retrouve l'équivalence entre la convergence dans $\mathbb{R}^n$ et la convergence coordonnée par coordonnée pour $\|\cdot\|_\infty$.

Proposition 3.3.8 – Caractérisation par la limite des normes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. La suite (x_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite de réels $(\|x_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

En particulier, cela permet d'exploiter un certain nombre de techniques de majorations vues dans le cadre de réels.

Méthode 3.3.9

Pour montrer que $u_n \to \ell$, il suffit de trouver une majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n - \ell\| \leqslant M_n,$$

où (M_n) est une suite de réels de limite nulle.

Comme il n'y a *a priori* pas dans E d'autres opérations que l'addition et la multiplication par un scalaire.

Proposition 3.3.10 – Règles opératoires générales

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments d'un e.v.n. E, et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n), (v_n) et λ_n sont convergentes, alors :

(i) la suite $(u_n + v_n)$ est convergente, et

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n;$$

(ii) la suite $(\lambda_n u_n)$ est convergente, et

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n u_n = \lim_{n\to+\infty \lambda_n} \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

◁ **Éléments de preuve.**
Majorer la norme de la différence avec la limite présumée en utilisant l'inégalité triangulaire. ▷

Nous donnons dès maintenant une règle opératoire concernant les produits, mais elle sera démontrée plus tard, nécessitant quelques propriétés liées à la continuité des applications linéaires et multilinéaires.

Proposition 3.3.11 – Limite d'un produit

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., muni d'un produit tel que :

(i) $(x, y) \mapsto x \cdot y$ soit bilinéaire ;

(ii) il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(x, y) \in E$, $\|xy\| \leqslant k \cdot \|x\| \cdot \|y\|$.

Alors, si $(u_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathrm{E}^{\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes, il en est de même de $(u_n v_n)$, et de plus,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n \cdot \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Exemple 3.3.12

Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{n}\right) & \mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\ \frac{1}{\ln(n)} & 1 + \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}^{42}$.

III.2 Caractérisations séquentielles

La convergence des suites permet d'obtenir des caractérisations souvent assez pratiques d'un certain nombre des notions topologiques étudiées jusqu'ici.

Proposition 3.3.13 – Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Soit $A \subset E$, et $a \in E$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $a \in \overline{A}$

(ii) il existe une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$.

Corollaire 3.3.14

En particulier, toute suite convergente d'éléments de A converge dans $\overline{A}$.

On en déduit les autres caractérisations qui suivent.

Proposition 3.3.15 – Caractérisation séquentielle de la densité

Soit A et B des parties de E.

(i) A est dense dans B si et seulement si pour tout $b \in B$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \to b$.

(ii) A est partout dense si et seulement si pour tout $b \in E$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \to b$.

Proposition 3.3.16 – Caractérisation des fermés

Soit $F \subset E$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) F est fermé ;

(ii) toute suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ admet sa limite dans F

Autrement dit, F est fermé si et seulement si F est stable par passage à la limite.
Par restriction à A, on obtient de même une caractérisation des fermés relatifs.

Proposition 3.3.17 – Caractérisation des fermés relatifs

Soit $A \subset E$, et $F \subset A$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) F est un fermé relatif de A ;

(ii) toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ convergente dans A admet sa limite dans F.

IV Valeurs d'adhérence et compacité

IV.1 Valeur d'adhérence d'une suite

Définition 3.4.1 – Suite extraite, fonction extractrice

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. Une *suite extraite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.
2. La fonction φ est appelée *fonction extractrice* de la suite extraite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ainsi formellement, une suite extraite de (u_n) est une composée de $u_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ par une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. En pratique, cela signifie que (v_n) est constitué de termes de (u_n), dans l'ordre, et sans répétition d'indice.

Le comportement des suites extraites à l'infini donne des indications quant au comportement de la suite initiale. Si le comportement de la suite initiale détermine le comportement d'une suite extraite, il est beaucoup plus délicat de faire chemin arrière, une suite extraite ne pouvant fournir qu'une information partielle sur la suite totale.

Théorème 3.4.2 – Théorème de convergence des suites extraites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans E. Alors toutes les suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, de même limite que (u_n).

◁ **Éléments de preuve.**

La stricte croissance de l'extractrice φ montre que pour tout n, $\varphi(n) \geqslant n$. Le résultat est alors immédiat par la définition de la limite. ▷

Proposition 3.4.3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ si et seulement si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ, et dans ce cas, $\lim u_n = \ell$.

C'est un cas particulier de la situation plus générale suivante :

Théorème 3.4.4 – Convergence par étude de suites extraites couvrantes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille **finie** d'extractrices, telle que $\bigcup\limits_{i\in I} \varphi_i(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Alors (u_n) converge vers ℓ si et seulement si pour tout $i \in I$, $(u_{\varphi_i(n)})$ converge vers ℓ.

◁ **Éléments de preuve.**

Sens direct déjà acquis. Pour le sens réciproque, considérer $\varepsilon_i > 0$, associé à chaque φ_i, ainsi qu'un rang de validité N_i, puis se placer au delà du plus grand des N_i. ▷

La notion de suite extraite est intimement liée à celle de valeur d'adhérence :

Définition 3.4.5 – valeur d'adhérence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, et $a \in E$. On dit que a est une *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $\lim u_{\varphi(n)} = x$.

Ainsi, l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble de toutes les limites (finies) des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples 3.4.6

1. Décrire les valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$.
2. Décrire les valeurs d'adhérence de la suite $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$.
3. Décrire une suite réelle n'ayant pas de valeur d'adhérence.

Proposition 3.4.7 – Valeurs d'adhérences d'une suite convergente

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si $u_n \to \ell$, alors ℓ est valeur d'adhérence de (u_n) et c'est la seule.

◁ **Éléments de preuve.**
C'est une réexpression du théorème de convergence des suites extraites. ▷

Ainsi, une suite ayant au moins 2 valeurs d'adhérences est divergente.

Avertissement 3.4.8

La réciproque est fausse !

Exemples 3.4.9

Construire une suite réelle non convergente et admettant une seule valeur d'adhérence.

Proposition 3.4.10 – Valeurs d'adhérences d'une suite extraite

Soit (v_n) une suite extraite de (u_n). L'ensemble des valeurs d'adhérence de (v_n) est inclus dans l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n).

◁ **Éléments de preuve.**
Faire une double-extraction, ce qui revient à composer les extractrices. Attention au sens dans lequel écrire cette composée. ▷

Proposition 3.4.11 – Caractérisation des valeurs d'adhérence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) a est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
(ii) pour tout voisinage V de a, il existe $I \subset \mathbb{N}$ infini tel que pour tout $n \in I$, $u_n \in V$;
(iii) pour tout voisinage V de a, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $u_n \in V$;
(iv) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $I \subset \mathbb{N}$ infini tel que pour tout $n \in I$, $u_n \in B(a, \varepsilon)$;
(v) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geqslant N$ tel que $u_n \in B(a, \varepsilon)$.

◁ **Éléments de preuve.**

- $(i) \Longrightarrow (ii)$: utiliser la définition topologique de la convergence d'une suite extraite vers a ;
- $(ii) \Longrightarrow (iv)$: les boules centrées en a sont des voisinages de a ;
- $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$ et $(iv) \Longleftrightarrow (v)$ car un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est infini si et seulement si il est non borné ;
- $(v) \Longrightarrow (i)$ en construisant une suite $(u_{\varphi(n)})$ associée à une suite (ε_n) convergent vers 0.

▷

IV.2 Théorème de Bolzano-Weierstass dans un e.v.n. de dimension finie

Comme l'a montré un exemple précédent, une suite n'admet pas nécessairement de valeur d'adhérence. Le théorème de Bolzano-Weierstrass, que vous avez vu en première année, donne un résultat d'existence pour les suites réelles, sous certaines conditions.

Théorème 3.4.12 – Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente. En d'autres termes, toute suite réelle bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

◁ **Éléments de preuve.**

On peut faire une dichotomie, en gardant toujours une moitié de l'intervalle contenant une infinité de termes de la suite (u_n). ▷

Tout ce qui précède reste évidemment valide, mais on peut également s'intéresser dans ce cadre à la convergence vers $+\infty$ ou $-\infty$, et donc définir des valeurs d'adhérence infinies.

Proposition/Définition 3.4.13 – Valeur d'adhérence infinie

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ convergent vers $+\infty$;

(ii) pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $u_n \geqslant A$;

(iii) pour tout $A \in \mathbb{R}$ et tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que une $u_n \geqslant A$;

(iv) (u_n) n'est pas majorée.

Proposition 3.4.14 – Existence d'une valeur d'adhérence, HP

Toute suite réelle (u_n) admet une valeur d'adhérence au moins dans $\overline{\mathbb{R}}$.

◁ **Éléments de preuve.**

Discuter suivant que (u_n) est bornée ou non, pour pouvoir appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass. ▷

Théorème 3.4.15 – Caractérisation de la convergence par les valeurs d'adhérence, HP

Une suite (u_n) converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$.

◁ **Éléments de preuve.**

Sens direct déjà étudié. Sens réciproque : pour tout voisinage V de a (unique valeur d'adhérence), seul un nombre fini de termes de u_n est hors de V (sinon on peut en extraire une suite convergente d'après la proposition précédente, et on obtient une deuxième valeur d'adhérence). ▷

Avertissement 3.4.16

Attention à bien considérer les éventuelles valeurs d'adhérences infinies. Comme on l'a vu sur un exemple, l'existence et l'unicité d'une valeur d'adhérence réelle n'est pas suffisante pour assurer la convergence.

IV.3 Sous-ensembles compacts

Une autre situation permettant d'assurer la caractérisation de la convergence par l'unicité de la valeur d'adhérence est le cas où les valeurs prises par (u_n) se retrouvent toutes dans un ensemble sur lequel on peut utiliser une propriété similaire à la conclusion du théorème de Bolzano-Weierstrass. Cela motive la définition suivante.

Définition 3.4.17 – Sous-ensemble compact

Soit E un e.v.n., et K une partie de A. On dit que K est compact (ou séquentiellement compacte, ou compact au sens de Bolzano-Weierstrass) si et seulement si de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K$ d'éléments de K, on peut extraire une suite convergeant vers un élément de K.

La propriété définissant la compacité est appelée propriété de Bolzano-Weierstrass.

Exemples 3.4.18

1. Les intervalles $[a, b]$ fermés bornés sont des compacts de $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{U}$ est un compact de $\mathbb{C}$.
3. Un sous-ensemble fini de E est compact.

Propriétés 3.4.19

Soit E un e.v.n., et K un compact.

1. K est fermé et borné.
2. Soit F un fermé relatif de K. Alors F est compact.

Avertissement 3.4.20

On prendra garde que (i) ne permet pas de caractériser les compacts. On montrera que c'est le cas en dimension finie. En revanche, un théorème célèbre (théorème de Riesz) affirme que la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie, ce qui donne un contre-exemple en dimension infinie.

Théorème 3.4.21 – Caractérisation de la convergence par les v.a. sur un compact

Soit E un e.v.n., et K un compact de E. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$. Alors (u_n) converge si et seulement si (u_n) admet une unique valeur d'adhérence.

◁ **Éléments de preuve.**

Si (u_n) a une unique v.a. ℓ et ne converge pas, on peut extraire une suite ne s'approchant pas trop de ℓ. Cette suite doit avoir une v.a. qui ne peut pas être ℓ. ▷

Remarque 3.4.22

Du fait même de sa définition (équivalente à l'existence d'une valeur d'adhérence), la notion de compacité joue un rôle central dans de nombreux problèmes existentiels. L'hypothèse de compacité permet par exemple d'obtenir l'existence d'extrema de fonctions continues.

Théorème 3.4.23 – Produit de compacts

Soit $(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p)$ des e.v.n., et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, K_i un compact de E_i. Alors $K_1 \times \cdots \times K_i$ est un sous-ensemble compact de $E_1 \times \cdots \times E_p$ (muni de la norme produit $\|\cdot\|_\infty$.

◁ **Éléments de preuve.**
Par extractions successives, on en déduit une version plus générale. ▻

Théorème 3.4.24 – Bolzano-Weierstrass en dimension finie

Soit E un e.v.n. de dimension finie, de base $\mathcal{B}$, et muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$. Alors toute suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence.

◁ **Éléments de preuve.**
C'est un cas particulier du théorème précédent :

- tout d'abord pour récupérer BW sur $\mathbb{C}$
- puis en décomposant E en produit de droites.

À chaque étape, le caractère borné permet de se restreindre à un intervalle fermé borné de la droite considérée, donc compact. ▻

Une variante de ce résultat est le très important résultat suivant :

Théorème 3.4.25 – Compacité de $\overline{B}(a, r)$ pour $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$ en dimension finie

Soit E un espace de dimension finie, et $\mathcal{B}$ une base de E. Dans l'e.v.n. $(E, \|\cdot\|_{\mathcal{B},+\infty})$, $\overline{B}(a, r)$ est compact.

◁ **Éléments de preuve.**
C'est une réexpression du résultat précédent, à quoi on ajoute le caractère fermé de la boule. ▻

V Comparaison de normes

Comme on l'a vu dans plusieurs énoncés (par exemple le théorème de Bolzano-Weierstrass), il est souvent plus pratique de travailler avec une norme particulière. En général, ce n'est pas suffisant pour pouvoir généraliser le résultat pour une norme quelconque. On s'intéresse ici à des conditions permettant de nous assurer que pour l'étude d'un problème particulier, deux normes sont interchangeables (*i.e.* que travailler avec l'une plutôt que l'autre est équivalent).

V.1 Domination

Définition 3.5.1 – Domination de normes

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 est dominée par N_2 s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in E, \quad N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x).$$

Proposition 3.5.2 – Caractérisation par l'image de la sphère unité fermée

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) N_1 est dominée par N_2

(ii) Toute partie bornée pour N_2 est également bornée pour N_1

(iii) il existe α tel que pour tout $x \in E$, $N_2(x) \leqslant 1 \Longrightarrow N_1(x) \leqslant \alpha$.
En d'autres termes, la boule fermé unité pour N_2 est bornée pour N_1 ;

(iv) il existe α tel que pour tout $x \in E$, $N_2(x) = 1 \Longrightarrow N_1(x) \leqslant \alpha$.
En d'autres termes, la sphère unité pour N_2 est bornée pour N_1 ;

Proposition 3.5.3 – Transitivité de la relation de domination

Si N_1 est dominée par N_2 et N_2 dominée par N_3, alors N_1 est dominée par N_3.

Exemple 3.5.4

Dans $\mathbb{R}^2$:

- $\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_2$
- $\|\cdot\|_2$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$
- $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par $\|\cdot\|_1$.

Plus généralement :

Théorème 3.5.5 – Comparaison des normes 1, 2 et ∞

Soit $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des e.v.n., et $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ les trois normes usuelles définies sur le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$. Alors

- $\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_2$
- $\|\cdot\|_2$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$
- $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par $\|\cdot\|_1$.

Soit alors E un e.v.n. muni d'une base $\mathcal{B}$. En considérant la décomposition de E comme produit cartésien de droites, on en déduit une comparaison similaire entre $\|\cdot\|_{\mathcal{B},1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B},2}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$.

Proposition 3.5.6 – Comparaison des topologies

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et N_1 et N_2 deux normes. On note $\mathcal{V}_i(a)$ l'ensemble des voisinages de a au sens de la norme N_i et $\mathcal{O}_i$ l'ensemble des ouverts au sens de la norme i. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) N_1 est dominée par N_2

(ii) $\forall a \in E$, $\mathcal{V}_1(a) \subset \mathcal{V}_2(a)$

(iii) $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$.

Proposition 3.5.7 – Comparaison des convergences

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, et N_1 et N_2 deux normes. Si N_1 est dominée par N_2, alors toute suite convergeant au sens de N_2 converge aussi au sens de N_1, vers la même limite.

◁ **Éléments de preuve.**
Peut se faire soit par majoration soit par les voisinages en utilisant la propriété précédente. ▷

Méthode 3.5.8 – Montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2

- Il suffit de trouver une suite bornée pour N_2 qui ne le soit pas pour N_1
- Il suffit de trouver une suite convergente pour N_2 qui ne le soit pas pour N_1.

Exemples 3.5.9

1. Dans $\mathcal{C}^0([0,1])$, $\|\cdot\|_1$ est dominée par $\|\cdot\|_\infty$, mais $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas dominée par $\|\cdot\|_1$
2. Montrer que dans $\mathbb{K}[X]$, $\|\cdot\|_\infty$ est dominée par $\|\cdot\|_1$ mais $\|\cdot\|_1$ n'est pas dominée par $\|\cdot\|_\infty$.

V.2 Normes équivalentes

Définition 3.5.10 – Normes équivalentes

On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si N_1 est dominée par N_2 et N_2 est dominée par N_1.
De manière équivalente, cela revient à dire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \beta N_2(x).$$

Proposition 3.5.11

Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

Proposition 3.5.12

Les comparaisons faites dans le paragraphe précédent amènent :

- les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur un produit fini d'e.v.n. ;
- les normes $\|\cdot\|_{\mathcal{B},1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B},2}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$ sont équivalentes sur E muni d'une base $\mathcal{B}$.

Les comparaisons des topologies et propriétés de convergence établies dans le paragraphe précédent amènent :

Théorème 3.5.13 – Comparaison des convergences pour 2 normes équivalentes

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E et $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors (u_n) est convergente au sens de la norme N_1 si et seulement si elle est convergente au sens de la norme N_2, la valeur de la limite étant la même pour les deux normes.

En particulier, les objets et propriétés topologiques et séquentiels (définis soit avec les ouverts ou voisinages, soit avec des propriétés de convergence) sont les mêmes pour deux normes équivalentes. Notamment, deux normes équivalentes définissent les mêmes compacts.
Ainsi, la compacité, montrée pour un produit cartésien de compacts au sens de la topologie produit (définie avec $\|\cdot\|_\infty$) reste donc aussi valide avec les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.
L'équivalence des normes permet donc de choisir, parmi celles équivalentes à la norme donnée initialement, celle qui est le plus adaptée à la situation. Comme on l'a vu à plusieurs reprises, la norme $\|\cdot\|_\infty$ est souvent assez pratique à manipuler. Mais parfois, cela peut être intéressant de « panacher » les normes au gré des étapes du raisonnement.
Attention toutefois à ne faire cela qu'avec des normes équivalentes !
On verra dans le chapitre suivant que c'est toujours le cas lorsque E est de dimension finie.

VI Espaces métriques (HP)

Comme on l'a évoqué plus haut, on peut définir des distances de façon beaucoup plus générale

Définition 3.6.1 – Distance

Soit A un ensemble quelconque. Une distance d sur A est une application $d : A^2 \to \mathbb{R}$ telle que

(i) (séparation) pour tout $(x, y) \in A^2$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(ii) (symétrie) pour tout $(x, y) \in A^2$, $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) (inégalité triangulaire) pour tout $(x, y, z) \in A^3$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Comme on l'a vu, cela implique en particulier la positivité. La propriété 3.2.2 affirme alors que l'application $(x, y) \mapsto \|y - x\|$ est une distance.

Exemples 3.6.2

- Soit A une partie d'un e.v.n.. La distance associée à la norme de E se restreint en une distance sur A.
- Distance entre 2 sommets d'un graphe non orienté connexe (en un seul morceau), comme étant le nombre minimal d'arêtes à parcourir pour aller d'un sommet à l'autre.

Définition 3.6.3 – Espace métrique

Un espace métrique (E, d) est un ensemble E (pas forcément un espace vectoriel), muni d'une distance d sur E.

On peut alors définir dans un espace métrique (E, d), de même que dans un *e.v.n.*, des boules, des voisinages, des ouverts, et des fermés.
Ce point de vue permet de clarifier la définition de la topologie relative (les ouverts et fermés relatifs) vue en cours de chapitre.

Proposition 3.6.4 – Caractérisation de la topologie relative par restriction

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n., et A une partie de E. Alors la distance d définie par $\|\cdot\|$ se restreint à A en une distance d_A. La topologie associée à l'espace métrique (A, d_A) est alors la topologie relative de A définie en II-4.

On peut également définir une notion de convergence.

Définition 3.6.5 – Convergence dans un espace métrique

Soit (E, d) un espace métrique, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite (et donc toutes) :

(i) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Longrightarrow d(u_n, \ell) \leqslant \varepsilon\,;$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \in B(\ell, \varepsilon)\,;$

(iii) $\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \in V\,;$

Les caractérisations séquentielles restent alors vraies.