4

Intégrales généralisées

Le but de ce chapitre est de généraliser la définition des intégrales au cas d'intervalles non bornés, ou d'intervalles aux bornes desquels la fonction f n'est pas définie, et n'admet pas de limite finie.
Le procédé est le même que celui qui permet de passer des sommes finies aux séries, à savoir passer à la limite sur les bornes. D'ailleurs, comme vous vous en rendrez compte, l'étude des intégrales généralisées possède des similarités très fortes avec l'étude des séries.
Pour cela, afin de pouvoir définir l'intégrale de f sur un intervalle I quelconque, il est déjà nécessaire de pouvoir définir son intégrale sur tout segment $[a, b] \subset I$. Le programme de première année nous donne une condition suffisante simple à énoncer pour l'intégrabilité sur un segment : la continuité par morceaux de f. Même si ce n'est qu'un condition nécessaire et pas nécessaire, c'est ce cadre que nous adoptons.
Nous rappelons donc la définition importante suivante :

Définition 4.0.1 – Fonction continue par morceaux sur un intervalle I

1. Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision (finie)
$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_{n-1} < \sigma_n = b$$
de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]\sigma_k, \sigma_{k+1}[}$ soit continue et prolongeable par continuité sur $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$.
2. Soit I un intervalle quelconque. On dit que f est continue par morceaux sur I si f est continue par morceaux sur tout segment $[a, b]$ tel que $[a, b] \subset I$.

On notera $\mathcal{C}^0_m([a, b], \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues par morceaux. La notation n'étant pas complètement standard, la redéfinir si vous l'utilisez.

Exemples 4.0.2

1. $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
2. $x \mapsto \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
   Sa restriction à $]0, +\infty[$ est continue par morceaux.

I Intégrales généralisées sur un intervalle $[a, b[$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$

Dans toute cette partie, on considère un intervalle $I = [a, b[$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tels que $a < b$.
Tout ce qu'on fait s'adapte facilement, par symétrie, à un intervalle $]b, a]$.
Le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I.1 Définitions et propriétés élémentaires

Par définition, une fonction continue par morceaux sur I est en particulier continue par morceaux sur tout segment $[c, d]$ inclus dans I, notamment sur des segments $[a, x]$. Elle est donc intégrable (au sens de Riemann) sur ces intervalles fermés bornés. Cela motive la définition suivante.

Définition 4.1.1 – Intégrale généralisée sur $[a, b[$

- Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une application continue par morceaux (c.p.m) sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente si la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t,$$

  définie sur $[a, b[$, admet une limite finie lorsque x tend vers b.
- Lorsque $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente, sa valeur est notée d'une des façons suivantes, et définie par :

$$\int_I f = \int_I f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t.$$

- Si $\displaystyle\int_a^b f$ n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

On parle aussi parfois d'intégrale impropre et de borne impropre pour désigner la borne b qui est exclue du domaine.

Exemples 4.1.2

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ est convergente.
3. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente.

Remarque 4.1.3

La forte ressemblance avec les séries pourrait faire croire que si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $f(x) \to 0$. Est-ce le cas ?

Une situation où la convergence est simple à obtenir est la suivante :

Proposition 4.1.4 – Intégrale faussement généralisée

On suppose que $b \neq +\infty$. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une application c.p.m telle que f admette un prolongement $\tilde{f}$ c.p.m sur $[a, b]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente, et

$$\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}.$$

Une telle intégrale est parfois appelée intégrale faussement généralisée.

Exemple 4.1.5

Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$.

Remarque 4.1.6

En particulier, si f est c.p.m sur $[a, b]$, considérer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$ au sens de Riemann, ou au sens de l'intégrale généralisée de $f_{|[a,b[}$ revient au même. Cela donne une certaine cohérence à la notation, et permet de s'assurer que la relation

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

reste aussi vrai pour des fonctions déjà c.p.m. (donc Riemann-intégrables) sur $[a, b]$.

Dans la suite, on reprend $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Proposition 4.1.7 – Linéarité

Soit $f, g \in \mathcal{C}^0_m([a, b[, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont convergentes, alors $\displaystyle\int_a^b f + \lambda g$ aussi, et

$$\int_a^b f + \lambda g = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g.$$

2. Si $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente et $\displaystyle\int_a^b g$ est divergente, alors $\displaystyle\int_a^b (f + g)$ est divergente.
3. Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont divergentes, on ne peut rien dire en toute généralité de $\displaystyle\int_a^b (f + g)$.

Proposition 4.1.8 – Positivité et croissance

Soit $f, g : [a, b[fl \mathbb{K}$ deux applications c.p.m. sur $[a, b[$.

1. (Positivité) Si f est positive sur $I = [a, b[$, et $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \geqslant 0$.
2. (Croissance) Si $f \leqslant g$ sur I, et si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont convergentes, alors

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

3. (Stricte positivité) Si f est continue et positive sur $[a, b[$, non partout nulle, et d'intégrale convergente, alors

$$\int_a^b f > 0.$$

Remarque 4.1.9

La propriété de stricte croissance s'utilise souvent dans sa version contraposée : si f est continue et positive sur I, d'intégrale (convergente) nulle, alors f est identiquement nulle.

Proposition 4.1.10 – Chasles

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une application c.p.m. sur $[a, b[$, et $c \in [a, b[$. Alors :

1. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente si et seulement si $\displaystyle\int_c^b f$ est convergente.
2. Le cas échéant, on a alors

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Proposition 4.1.11 – Intégrale dépendant de sa borne non impropre

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_a^x f$ soit convergente. Alors la fonction

$$F : \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

est bien définie sur $[a, b[$. De plus, F est dérivable sur $[a, b[$, et

$$\forall x \in [a, b[, \quad F'(x) = -f(x).$$

Attention au signe moins, provenant du fait que la dépendance se fait sur la borne inférieure de l'intégrale.

Remarques 4.1.12

1. Attention à l'hypothèse de continuité, la c.p.m ne suffit pas ici !
2. Par composition, on en déduit des formules de dérivation pour $x \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^b f(t)\ \mathrm{d}t$, comme dans le cas d'intégrales définies.
3. Le signe disparaît lorsqu'on adapte à l'intervalle $]b, a]$: la dérivée de $F : x \mapsto \displaystyle\int_b^x f$ est dans ce cas $f(x)$.

I.2 Intégrales de référence

Comme pour le cas des séries, on pourra souvent se ramener à l'étude de la convergence d'intégrales de fonctions positives. Il est donc intéressant de pouvoir disposer de techniques efficaces d'études de convergence dans ce contexte.
Souvent ces techniques seront non calculatoires, dans le sens où elles ne passent pas par le calcul des intégrales partielles et de leurs limites. On privilégiera souvent des méthodes de comparaison, comme dans le cas de séries.
Pour cela, il est nécessaire de disposer d'un certain nombre de séries de référence dont on connaît les propriétés de convergence, afin de pouvoir utiliser pour mener nos comparaisons.

Proposition 4.1.13 – Intégrales de référence en la borne $+\infty$

1. Intégrale de Riemann : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Intégrale exponentielle : pour $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\ dt$ converge si et seulement si $a > 0$.

On adapte ces exemples pour la borne $-\infty$:

Proposition 4.1.14 – Intégrales de référence en la borne $+\infty$

1. Intégrale de Riemann : pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{|t|^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Intégrale exponentielle : pour $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-at}\, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a < 0$.

Proposition 4.1.15 – Intégrale de Riemann en une borne finie b

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{|t-b|^\alpha}\, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_b^a \frac{1}{|t-b|^\alpha}\, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Exemples 4.1.16

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est convergente, alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est divergente.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est divergente, alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ sont toutes deux divergentes.

Nous verrons un peu plus tard d'autres intégrales de référence, appelées intégrales de Bertrand, de la forme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta}\, \mathrm{d}t$, qui peuvent être utiles pour affiner un peu les comparaisons (notamment quand α devient proche de 1, ou égal à 1). Mais ces intégrales ne sont pas explicitement au programme, et il faudra savoir redonner les justifications idoines au cas par cas.
Un autre exemple qu'on peut obtenir par un calcul explicite, mais qui sert assez rarement d'intégrale de référence du fait de son comportement peu marqué, est l'intégrale du logarithme en 0. Comme ce n'est pas une intégrale de référence officielle du programme, elle n'a que le statut d'exemple.

Exemple 4.1.17

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente.

I.3 Théorèmes de comparaison pour les intégrales de fonctions positives

Les séries de référence ont été étudiées de façon purement calculatoire en revenant à la définition : le calcul explicite de l'intégrale pertielle a permis dans chacun des cas d'étudier l'existence d'une limite.
Assez rapidement, cette méthode devient insuffisante pour l'étude de la convergence des intégrales, soit parce que les calculs deviennent trop complexes, soit (cela arrive), parce qu'on n'est pas en mesure de calculer explicitement l'intégrale à étudier, en se servant des fonctions usuelles.
Les techniques de comparaisons nous permettrons de contourner ce point de vue calculatoire, exactement comme lors de l'étude des séries.
On travaille toujours sur un intervalle $I = [a, b[$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Proposition 4.1.18 – Bonne définition dans $\overline{\mathbb{R}}_+$

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ c.p.m. et positive. Alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ admet toujours une limite, finie ou infinie. Dans le cas oà la limite est infinie, on s'autorisera la notation

$$\int_a^n f(t)\ \mathrm{d}t = +\infty.$$

Remarque 4.1.19

1. Dans le cas positif, on peut donc considérer $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ avant toute étude de convergence
2. Le programme stipule expressément qu' « un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence ». Autrement dit, cela autorise à mener une méthode calculatoire sans se préoccuper de la convergence.
3. Cela permet aussi de justifier la convergence par majoration en obtenant après calculs une majoration stricte par $+\infty$.

Lemme 4.1.20 – CNS de convergence d'une intégrale de fonction positive

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une application c.p.m. sur $[a, b[$, et positive. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $\int_a^b f$ converge

(ii) $x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est bornée.

Théorème 4.1.21 – Théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ c.p.m. sur $[a, b[$ et telles que $0 \leqslant f \leqslant g$ sur $[a, b[$. Alors :

1. Si $\int_a^b g$ est convergente, il en est de même de $\int_a^b f$.
2. Si $\int_a^b f$ est divergente, il en est de même de $\int_a^b g$.

Remarque 4.1.22

Il suffit d'avoir la comparaison $0 \leqslant f \leqslant g$ au voisinage à gauche de b seulement. Par ailleurs, les intervalles de définition de f et g n'ont pas besoin d'avoir la même borne inférieure.

Corollaire 4.1.23 – Théorème de comparaison par domination ou négligeabilité

1. Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ c.p.m. sur $[a, b[$, positives, et telles que $f(x) \underset{b}{=} O(g(x))$.

   Alors la convergence de $\int_a^b g$ entraîne celle de $\int_a^b f$.
2. Cela reste vrai si on remplace l'hypothèse de domination par $f(x) \underset{b}{=} o(g(x))$

Exemple 4.1.24 – Intégrale de Gauss

Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ et de $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ (les deux moitiés de l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$).

Corollaire 4.1.25 – Théorème de comparaison par équivalences

Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ c.p.m. sur $[a, b[$, positives, et telles que $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$.

Alors $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ ont même nature.

Exemple 4.1.26

Pour quelles valeurs de x l'intégrale

$$\int_0^1 t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$$

est-elle convergente ?

I.4 Extension aux intégrales sur un intervalle ouvert quelconque I

Avant de voir comment se ramener à l'étude d'intégrales positives via l'étude de la convergence absolue, on étend les différents concepts et résultats vus jusqu'à présent au cas d'intégrales de fonctions définies sur un intervalle quelconque.

Comme on l'a dit le cas des intervalles semi-ouverts $]a, b]$ est similaire à celui exposé ci-dessus, en remplaçant le passage à la limite à gauche en b par le passage à la limite à droite en a sur la borne inférieure de l'intégrale.

Comme le cas des intervalles fermés bornés $[a, b]$ est du ressort du programme de MPSI (ce ne sont pas des intégrales généralisées, et il n'y a pas de passage à la limite nécessaire, même si ce ne serait pas fautif d'après la remarque 4.1.6), il reste à étudier le cas des intervalles ouverts $]a, b[$, avec $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition/Définition 4.1.27 – Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert

Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $a < b$, et soit $f :]a, b[$ une application c.p.m. sur $]a, b[$.

- On dit que $\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f(t) \, \mathrm{d}t$ soit convergente (en la borne a) et $\int_c^b f(t) \, \mathrm{d}t$ soit convergente (en la borne b).
- Cette propriété est alors indépendante du choix de $c \in]a, b[$
- On définit alors l'intégale de f sur $]a, b[$ par

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^c f(t) \, \mathrm{d}t + \int_c^b f(t) \, \mathrm{d}t.$$

- Cette définition est indépendante de c, et peut se réécrire

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \lim_{x \to a^+} \lim_{y \to b^-} \int_x^y f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Exemples 4.1.28 – Gauss, fonction Γ d'Euler

1. Intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ est convergente.
2. Fonction Γ d'Euler : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.
   Quel est le domaine de définition de Γ ?

Avertissement 4.1.29

Dans l'expression sous forme de double limite, les deux bornes doivent bien être indépendante. Si on lie les bornes, il peut y avoir des compensations qui faussent l'étude.

Exemple 4.1.30

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\ \mathrm{d}t$ est divergente, mais $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \sin(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

Les propriétés vues dans le cadre des intégrales généralisées en une seule borne s'étendent facilement

Théorème 4.1.31 – Chasles

Soit I un intervalle quelconque, d'extrémités $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, et c tel que $a < c < b$. Alors :

1. $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente si eu seulement si $\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$ le sont.
2. Dans ce cas,
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

◁ **Éléments de preuve.**

C'est juste un théorème bilan regroupant tous les cas qu'on a déjà vus.

- Si I est fermé borné, c'est la relation de Chasles usuelle pour les fonctions Riemann-intégrables sur un segment
- Si I est semi-ouvert, c'est le théorème 4.1.10.
- Si I est ouvert, c'est la définition de la convergence 4.1.27

▷

Proposition 4.1.32 – Linéarité

Soit I un intervalle quelconque de bornes $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit $f, g \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont convergentes, alors $\int_a^b f + \lambda g$ aussi, et
$$\int_a^b f + \lambda g = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g.$$
2. Si $\int_a^b f$ est convergente et $\int_a^b g$ est divergente, alors $\int_a^b (f+g)$ est divergente.

Proposition 4.1.33 – Positivité et croissance

Soit I un intervalle quelconque de bornes $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications c.p.m. sur I.

1. (Positivité) Si f est positive sur I, et $\int_a^b f$ est convergente, alors $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$.
2. (Croissance) Si $f \leqslant g$ sur I, et si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont convergentes, alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.
3. (Stricte positivité) Si f est continue et positive sur I, non partout nulle, et d'intégrale convergente, alors
$$\int_a^b f > 0.$$

I.5 Intégrabilité

Comme pour les séries, l'étude de la convergence d'une intégrale peut parfois s'étudier en étudiant d'abord la convergence de l'intégrale de son module. Cela permet de ramener l'étude au cas d'une intégrale d'une fonction positive, et donc d'exploiter les méthodes du paragraphe précédent, notamment les techniques de comparaison.

Définition 4.1.34 – Intégrabilité

1. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On dit que f est intégrable ou que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, si :
   - (i) f est continue par morceaux sur $[a, b[$;
   - (ii) $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.
2. Soit f définie sur un intervalle I tel que $\sup I = b$, et $b \notin I$. On dit que f est intégrable en b s'il existe $c \in I$ tel que $f_{|[c,b[}$ soit intégrable.
3. De même si $a = \inf(I)$, on dit que f est intégrable en a s'il existe $c \in I$ tel que $f_{]a,c]}$ soit intégrable.

Avertissement 4.1.35

- Attention à bien avoir la bonne terminologie, l'intégrabilité d'une fonction se définit par la convergence de $\displaystyle\int_a^b |f|$ et non de $\displaystyle\int_a^b f$.
- De plus, la notion d'intégrabilité porte sur la fonction, et non sur l'intégrale
- Faire le parallèle avec la notion de sommabilité des familles $(a_i)_{i\in I}$!

Remarques 4.1.36

1. Si f est c.p.m sur $[a, b[$ et de signe constant, la convergence de $\displaystyle\int_a^b f$ équivaut à l'intégrabilité de f.
   Cela reste en particulier vrai si f est de signe constant au voisinage de b.
2. La notion d'intégrabilité en b est une notion locale, qui permet d'évacuer momentanément les problèmes qu'il pourrait y avoir à un autre endroit de l'intervalle I.

Proposition 4.1.37 – Intégrabilité aux bornes vs intégrabilité globale

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, où I est un intervalle de bornes a et b. On suppose que f est c.p.m sur I. Les propositions suivantes sont équivalentes:

- f est intégrable sur I
- f est intégrable en a et en b.

Remarque 4.1.38

Avec les notations de la proposition, si $a \in I$, l'intégrabilité en a est acquise, et il ne reste dans le second point que l'intégrabilité en b à étudier.

La propriété importante permettant de ramener dans beaucoup de situations l'étude de la convergence d'une intégrale à l'étude de l'intégrabilité de l'intégrande est similaire à la propriété reliant la convergence absolue et la convergence des séries.

Proposition 4.1.39 – CVA implique CV

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$. Si f est intégrable, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

◁ **Éléments de preuve.**

- On commencer par étudier le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, en décomposant $f = f^+ - f^-$, et en utilisant le fait que $0 \leqslant f^+, f^- \leqslant |f|$. Le théorème de comparaison et la linéarité permettent de conclure.
- On passe de même de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ en décomposant f en partie réelle et partie imaginaire.

▷

Exemple 4.1.40

Montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

Avertissement 4.1.41

Attention, comme pour les séries, la réciproque est fausse : il peut exister des fonctions f telles que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge sans que f soit intégrable. On dira dans ce cas que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

Exemple 4.1.42

- En minorant $\displaystyle\int_{n\pi+\frac{\pi}{6}}^{(n+1)\pi-\frac{\pi}{6}} \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x$, montrer que $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$
- En effectuant une IPP sur l'intégrale partielle, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est semi-convergente.

Ainsi, l'étude d'une intégale généralisée passe souvent par l'étude d'une intégrale de fonction positive. Pour cette raison, il peut être commode de remarquer qu'on peut toujours donner une valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$ à l'intégrale d'une fonction positive :

Proposition/Définition 4.1.43 – Intégrale d'une fonction positive non intégrable

Soit I un intervalle quelconque, de bornes $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si f est c.p.m. sur I, positive, et non intégrable, alors

$$\lim_{x\to a^+} \lim_{y\to b^-} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

On s'autorise à écrire dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty.$$

Remarques 4.1.44

1. Selon les termes du programme, « pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence ».
2. Cela signifie concrètement que si f est positive, on peut commencer à manipuler (calculer ou majorer) $\displaystyle\int_a^b f$ sans s'être préoccupé au préalable de la convergence de cette intégrale
3. Cette remarque vaut notamment pour l'étude de l'intégrabilité de f. On peut toujours considérer $\displaystyle\int_a^b |f|$, sans justification préalable de sa convergence. Dans ce contexte, selon les termes

du programme officiel, « un calcul montrant que $\displaystyle\int_I |f| < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité ».

4. Dans ce cadre, les manipulations liées à la linéarité et aux majorations restent valides dans $\overline{\mathbb{R}}$ quelle que soit la nature des intégrales, ce qui découle de pa proposition suivante.

Proposition 4.1.45 – Validité des manipulations usuelles dans $\overline{\mathbb{R}}$

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions c.p.m et positives, et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, l'égalité suivante est toujours valide :

$$\int_I f(t) + \lambda g(t)\ \mathrm{d}t = \int_I f(t) + \lambda \int_I g(t)\ \mathrm{d}t.$$

2. Si $f \leqslant g$ sur I, alors dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, $\displaystyle\int_I f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\ \mathrm{d}t$.

◁ **Éléments de preuve.**

Dans le cas où tout converge, c'est déjà vu, et dans les autres cas, il suffit d'exprimer le fait que les divergences se font toujours vers $+\infty$ dans le cadre positif.

- Pour la linéarité, il s'agit aussi de constater que si les deux intégrales divergent, puisque $\lambda > 0$, il ne peut pas y avoir de compensation entre les deux termes, et $\displaystyle\int_I f + \lambda g$ est nécessairement divergente aussi.
- Pour la comparaison, utiliser les théorèmes de comparaison pour l'étude des convergences.

▷

Les théorèmes de comparaison s'adaptent pour l'étude de l'intégrabilité en une borne.

Théorème 4.1.46 – Théorèmes de comparaison pour l'intégrabilité

Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$ continues par morceaux, et $b = \sup I \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $f(x) \underset{b}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g en b implique celle de f en b
2. Si $f(x) \underset{b}{=} o(g(x))$, alors l'intégrabilité de g en b implique celle de f en b.
3. Si $f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de f en b équivaut à celle de g.

Ce théorème s'adapte bien entendu à la borne inférieure $a = \inf(I)$.

Exemple 4.1.47

Montrer l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$ de $f : x \mapsto \dfrac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} - 1)\sin(t)}{t}$.

Définition 4.1.48 – Ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$

On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur l'intervalle I. C'est donc une partie de $\mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$.

Proposition 4.1.49 – Espace $L^1(I, \mathbb{K})$

$L^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$.

Proposition 4.1.50 – Inégalité triangulaire dans $L^1(I, \mathbb{K})$

Soit $f \in L^1(I, \mathbb{K})$. Alors
$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

On note dans la suite de ce paragraphe $L^1_c(I, \mathbb{K})$ le sous-espace de $L^1(I, \mathbb{K})$ constitué des fonctions intégrables sur I et continues. La notation n'est pas standard et n'apparaît pas dans le programme officiel. Il faut la réintroduire si vous l'utilisez.

Le résultat suivant a déjà été vu lorsque $I = [a, b[$. Le cas général s'en déduit en recollant deux intervalles semi-ouverts.

Proposition 4.1.51 – Positivité, et stricte posititivité

Soit $f \in L^1_c(I, \mathbb{R})$ telle que $f \geqslant 0$. Alors $\displaystyle\int_I f \geqslant 0$, le cas d'égalité étant obtenu si et seulement si $f = 0$.

Corollaire 4.1.52 – E.v.n $(L^1_c(I, \mathbb{K}), \| \cdot \|_1)$

On définit, pour tout $f \in L^1_c(I, \mathbb{K})$,
$$\|f\|_1 = \int_I |f|.$$
Alors $\| \cdot \|_1$ est une norme sur $L^1_c(I, \mathbb{K})$.

I.6 Bilan méthodologique

Méthode 4.1.53 – Étudier la convergence d'une intégrale

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{K}$

- Étudier la c.p.m. sur $I =]a, b[$, voir si éventuellement f est (ou peut se prolonger en) une fonction c.p.m. sur $[a, b]$ (dans ce cas, il n'y a rien à faire) ou sur $[a, b[$ (ce qui évite d'avoir à couper en 2)
- S'il y a un problème de c.p.m. au milieu de l'intervalle, voir si on peut se ramener à des fonctions c.p.m. en subdivisant davantage l'intervalle.
- Commencer par l'étude de la borne en laquelle la convergence vous paraît la plus douteuse. S'il y a divergence en cette borne, il ne sera pas nécessaire d'étudier l'autre borne.
- Commencer par étudier l'intégrabilité en cette borne, notamment par comparaisons, puis en l'autre.
- Si la fonction n'est pas intégrable en l'une des 2 bornes, étudier la semi-convergence (il peut être intéressant de se ramener à un intervalle $[c, b[$ ou $]a, c]$, pour isoler les 2 bornes à étudier). Il n'y a pas de méthode standard, mais on pourra penser à l'une de ces possibilités :
  - ∗ faire un calcul explicite ;
  - ∗ Faire une (ou plusieurs) intégration(s) par parties de sorte à diminuer l'ordre de grandeur de l'intégrande, dans l'espoir de se ramener à une fonction intégrable. C'est ce qu'on a fait pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$;
  - ∗ Couper le domaine en tranches sur lesquelles f reste de signe constant, pour ensuite étudier la somme des intégrales sur ces tranches. Cela nous ramène à un problème sur les séries. Si la série obtenue diverge, c'est terminé, sinon, il faut encore contrôler ce qui se passe entre les points de la subdivision.

II Règles calculatoires

Cette section a pour but d'étendre au cas des intégrales généralisées les méthodes calculatoires établies pour les intégrales sur un segment, à savoir les changements de variable, et les intégrations par parties. Dans cette section, I désigne un intervalle de bornes $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, les bornes étant indifféremment ouvertes ou fermées. On désigne toujours par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 Changement de variables

Théorème 4.2.1 – Formule de changement de variable pour les intégrales généralisées

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $\varphi : J \to I$, où J est un autre intervalle de $\mathbb{R}$, d'extrémités $\alpha < \beta$. On suppose que :

(i) f est continue sur I ;

(ii) φ est bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence,

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{i.e.} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Le théorème de la bijection assure que $\lim\limits_{x\to a} \varphi^{-1}(x) = \alpha$ et $\lim\limits_{x\to b} \varphi^{-1}(b) = \beta$.

Ainsi, faire d'abord le changement de variable sur l'intégrale partielle $\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x$, pour $a < A < B < b$, puis faire tendre A vers a et B vers b. ▷

Corollaire 4.2.2 – Adaptation pour un changement de variable strictement décroissant

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $\varphi : J \to I$, où J est un autre intervalle de $\mathbb{R}$, d'extrémités $\alpha < \beta$. On suppose que :

(i) f est continue sur I ;

(ii) φ est bijective, strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence,

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{i.e.} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 4.2.3

On admet la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

1. Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$?
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Remarques 4.2.4

- Selon les termes du programme, « on applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variables usuels », ce qui est très vague. Cela englobe en tout cas les changements de variable affine. Pour le reste... c'est flou...
- Le théorème de changement de variable permet aussi de comparer la nature des intégales.

Donc c'est aussi un moyen d'étude de convergence.

Exemple 4.2.5

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)^\beta}\,\mathrm{d}x$ (intégrale de Bertrand)

Plus généralement, on peut énoncer :

Proposition 4.2.6 – Intégrales de Bertrand en $+\infty$, HP

- $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \ln(x)^\beta}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$, ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$) (*i.e.* $(\alpha, \beta) > (1, 1)$ pour l'ordre lexicographique)
- $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha \ln(x)^\beta}$ est intégrable en 0 si et seulement si $\alpha < 1$, ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

◁ **Éléments de preuve.**

A savoir faire car classique, bien que HP. Cela doit donc être refait en cas de nécessité.

- Le cas $\alpha \neq 1$ en $+\infty$ s'obtient facilement par comparaison à des séries de Riemann.
- On peut ramener l'étude en 0 à la précédente par changement de variable $y = \frac{1}{x}$.

▷

II.2 Intégration par parties

Notation 4.2.7

Si f est une fonction définie sur I d'extrémités $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et si f admet des limites finies (à droite) en a et (à gauche) en b, on note

$$\Big[f(x)\Big]_a^b = \lim_{x\to b^-} f(x) - \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Théorème 4.2.8 – Intégration par parties

Soit I un intervalle d'extrémités $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

(i) f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

(ii) le produit fg admet une limite finie en a^+ et en b^-.

Alors les intégrales $ds \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et $ds \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 4.2.9

Selon les termes du programme, « pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité », c'est à dire le caractère $\mathcal{C}^1$ de f et g.

Avertissement 4.2.10

Sous l'hypothèse d'existence des limites de fg, la convergence des intégrales est préservée, mais pas l'intégrabilité, comme le montre l'exemple déjà étudié de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 4.2.11 – Relation remarquable de Γ

Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

III Études asymptotiques

On s'intéresse pour terminer à l'étude de 2 problèmes asymptotiques liés aux intégrales :

- Le comportement asymptotique d'intégrales dépendant de leur borne, en particulier le comportement de l'intégrale partielle lorsqu'on fait tendre une borne vers la borne de I, lorsque l'intégrale diverge, et de même, le comportement de l'intégrale reste en cas de convergence. On retrouvera ce type d'études pour les séries plus tard.
- L'étude de la convergence d'une suite d'intégrales $\displaystyle\int_I f_n$.

III.1 Intégration des relations de comparaison

Dans ce paragraphe, on suppose que $I = [a, b[$. Les résultats s'adaptent facilement au cas $]a, b]$.

Théorème 4.3.1 – Intégration des relations de comparaison dans le cas convergent

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$. On suppose que :

- f et g sont continues par morceaux
- g est positive (ou au moins de signe constant) et intégrable en b.

Alors :

1. si $f \underset{b}{=} O(g)$, alors $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b}{=} O\left(\int_x^b g\right)$;
2. si $f \underset{b}{=} o(g)$, alors $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b}{=} o\left(\int_x^b g\right)$;
3. si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\displaystyle\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g$

Exemples 4.3.2

1. Soit $x > 0$. Trouver un équivalent simple lorsque y tend vers 0 de $\displaystyle\int_0^y t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide d'une IPP, trouver un équivalent simple lorsque y tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_y^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

Dans le cas divergent, ce sont les intégrales partielles qu'on pourra comparer.

Théorème 4.3.3 – Intégration des relations de comparaison dans le cas divergent

Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$. On suppose que :

- f et g sont continues par morceaux
- g est positive et non intégrable en b.

Alors :

1. si $f \underset{b}{=} O(g)$, alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{=} O\left(\int_a^x g\right)$;
2. si $f \underset{b}{=} o(g)$, alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{=} o\left(\int_a^x g\right)$;

3. si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g$

Exemples 4.3.4

1. Soit $x < 0$. Déterminer un équivalent en 0 de $y \mapsto \displaystyle\int_y^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. À l'aide d'une IPP, donner un équivalent simple de $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ quand x tend vers $+\infty$.

III.2 Théorème de convergence dominée

Dans cette section, on donne, sans preuve, un outil extrêmement puissant pour étudier la limite d'une suite d'intégrales. On verra plus tard un autre résultat permettant de « passer à la limite sous le signe $\displaystyle\int$ », lorsque la convergence des f_n est uniforme.

Théorème 4.3.5 – Théorème de convergence dominée, TCD, admis

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est c.p.m.

(ii) (f_n) converge simplement vers une fonction f

(iii) (hypothèse de domination) il existe $\varphi : I \to \mathbb{K}$, intégrable sur I et telle que, sur l'intervalle I, on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leqslant \varphi.$$

Alors les (f_n) et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f.$$

◁ **Éléments de preuve.**

L'intégrabilité des f_n et de f provient des théorèmes de comparaison. Le reste de la preuve est (vraiment) hors-programme, le bon cadre n'étant par celui de l'intégrale de Riemann, mais celui de l'intégrale de Lebesgue. Ce théorème sera donc admis. ▷

Exemples 4.3.6

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n\,\mathrm{d}x$
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\,\mathrm{d}x$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1} (x+n)\mathrm{e}^{-\sqrt{n}x}\,\mathrm{d}x$

Remarques 4.3.7

1. Lorsque la suite (f_n) est décroissante ce qui est le cas du premier exemple, alors on pourra toujours dominer la suite par f_0, à condition qu'elle soit intégrable.
2. Lorsque la suite est croissante, et que la limite f est intégrable, alors on pourra dominer (f_n) par f. C'est le cas du deuxième exemple.
3. Le dernier exemple montre un cas où (f_n) n'est ni croissante ni décroissante.