5

Fonctions continues sur un e.v.n.

Le but de ce chapitre est d'étendre la notion de continuité aux applications d'un e.v.n. dans un autre. Certains résultats d'analyse réelle se généralisent dans ce cadre : le théorème de Heine, le théorème des bornes atteintes (à juste titre aussi appelé théorème de compacité), et le théorème des valeurs intermédiaires, qui nécessite, pour sa généralisation, d'introduire la notion de connexité par arcs. Nous étudierons pour terminer la continuité des applications linéaires.

I Continuité sur un e.v.n.

I.1 Limites

Définition 5.1.1 – Limite finie en un point adhérent au domaine, définition métrique

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et $A \subset E$ une partie de E. Soit $f : A \longrightarrow F$, et $a \in \overline{A}$, et $b \in F$. On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \ \forall x \in A,\ \|x - a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Remarque 5.1.2

La signification de cette définition :

- $\forall \varepsilon > 0$: « Quelle que soit la marge d'erreur ε qu'on se donne, aussi petite soit-elle ... »
- $\exists \eta > 0$: « ... il existe une petite boule de rayon η centrée en a, quitte à prendre η très petit ... »
- $\forall x \in A,\ \|x - a\|_E < \eta \Longrightarrow$ ... : « ... tel que si x est à la fois dans A et dans cette boule ... »
- ... $\Longrightarrow \|f(x) - b\|_F < \varepsilon$: « alors $f(x)$ est proche à ε près de b. »

Autrement dit : « À condition de prendre $x \in A$ suffisamment proche de a, on peut rendre $f(x)$ arbitrairement proche de b ».

Remarques 5.1.3

1. L'hypothèse $a \in \overline{A}$ est nécessaire pour pouvoir considérer des points aussi proches qu'on veut de a.
2. L'inégalité à obtenir est d'autant plus contraignante que ε est petit. On peut se contenter d'étudier le cas de valeurs de ε inférieures à une valeur ε_0 donnée.
3. On peut généraliser cette définition à des fonctions définies entre deux espaces métriques. La continuité en a s'exprime alors de la manière suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ d_E(x, a) < \eta \Longrightarrow d_F(f(x), b) < \varepsilon,$$

où d_E et d_f sont les distances sur E et F respectivement.

Proposition 5.1.4

On peut remplacer une ou plusieurs des inégalités larges $|x-a| \leqslant \eta$ et $|f(x)-b| \leqslant \varepsilon$ par des inégalités strictes, cela donne une définition équivalente

◁ **Éléments de preuve.**

Le quantificateur universel sur ε nous assure que l'on peut aussi remplacer ε par $\varepsilon/2$. On déduit alors l'équivalence de la chaîne d'inclusions :

$$\overline{B}(b, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(b, \varepsilon) \subset \overline{B}(b, \varepsilon)$$

et des inclusions similaires avec a et $\frac{\eta}{2}$ (il sera alors peut-être nécessaire de considérer comme valeur de sortie $\frac{\eta}{2}$ et non η, ce qui nous donne aussi la validité de notre quantification existentielle). ▷

Proposition 5.1.5 – Limite en un point du domaine

Si $a \in A$, et si $f(x)$ admet une limite en a, alors cette limite est nécessairement égale à $f(a)$.

◁ **Éléments de preuve.**

Soit ℓ est la limite de f en a. Puisque a vérifie toujours $|a-a| \leqslant \eta$, on doit avoir, pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(a)-\ell| \leqslant \varepsilon$. ▷

Avec les notations de la définition, soit B une partie de E. On note

$$f(B) = f(A \cap B) = \{f(x),\ x \in A \cap B\} = \{y \in F \mid \exists x \in B,\ f(x) = y$$

Il s'agit donc de l'image directe de B par f (étendu au cas où B n'est pas inclus dans le domaine de f). La définition de la limite peut alors se réécrire de façon plus synthétique.

Proposition 5.1.6 – Réexpression de la définition métrique de la limite

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et $A \subset E$ une partie de X. Soit $f : A \longrightarrow F$, et $a \in \overline{A}$, et $b \in F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a ;

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\quad f(B(a, \eta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$.

I.2 Limites infinies lorsque $B = \mathbb{R}$

Lorsque $B = \mathbb{R}$, on peut, comme dans le cas des fontions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, considérer des limites infinies.

Définition 5.1.7 – Limite infinie en un point adhérent au domaine, définition métrique

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n., et $B \subset E$ une partie de E. Soit $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$, et $a \in \overline{B}$. On dit que :

(i) $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\quad \forall x \in B,\ \|x-a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant A;$$

(ii) $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\quad \forall x \in B,\ \|x-a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant A;$$

Exemple 5.1.8

On considère dans cet exemple (et ceux qui suivent) $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-e.v.n., pour la norme définie par le module. Étudier la limite en z_0 de $f : \mathbb{C}\backslash\{z_0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(z) = \frac{1}{|1-z_0|}$.

Remarque 5.1.9

On peut réexprimer la définition de la sorte : $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad f(B(x, \varepsilon)) \subset [A, +\infty[.$$

I.3 Limite en l'infini

Lorsque $E = \mathbb{R}$, et $+\infty$ est adhérent à A (donc A non majoré), on peut définir, comme dans le cas de fonctions réelles, des limites en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition 5.1.10 – Limites en $\pm\infty$ lorsque $E = \mathbb{R}$

Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un e.v.n., et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non majorée de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \longrightarrow F$, et $a \in \overline{A}$. On dit que $f(x)$ tend vers $b \in F$ lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \lambda > 0, \quad \forall x \in A, \ x \geqslant \lambda \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F < \varepsilon;$$

ou, de façon équivalente, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \lambda > 0, \quad f([\lambda, +\infty[) \subset B(b, \varepsilon).$$

Exemple 5.1.11

Étudier la limite dans $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ de la fonction $x \mapsto f_x$ lorsque x tend vers $+\infty$, où f_x est la fonction définie par

$$f_x(t) = (1-t)t^x.$$

Remarque 5.1.12

Le cas de la convergence de suites à valeurs dans un e.v.n. $(F, \|\cdot\|_F)$ est un cas particulier de cette définition, lorsque $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

On peut adapter cette définition dans le cas où $(E, \|\cdot\|_E)$ est un e.v.n. quelconque, mais au lieu de faire tendre x vers un infini dans une direction précise, on fait tendre x vers un infini non directionnel, c'est-à-dire qu'on fait tendre $\|x\|$ vers $+\infty$.

Définition 5.1.13 – Limite lorsque $\|x\| \to +\infty$

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et $A \subset E$ une partie de E. Soit $f : A \to F$. On suppose que A n'est pas borné. On dit que $f(x)$ tend vers $b \in F$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A > 0, \quad \forall x \in A, \ \|x\|_E \geqslant A \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Exemple 5.1.14

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Montrer que $f(z)$ tend vers 0 lorsque $|z| \to +\infty$.

Remarque 5.1.15

Toutes les définitions données dans le cadre des fonctions réelles (notamment les limites infinies ou les limites en des points infinis) ont été données, dans le cadre du programme de première année, dans le cas où f est définie sur un intervalle (ou une union finie d'intervalles) et où a est un point de cet intervalle ou une extrémité. Cette contrainte avait pour but de se limiter à des points adhérents au domaine, mais sans le dire. Les définitions s'étendent sans peine au cas d'un point $a \in \overline{X}$, éventuellement infini (on rappelle que $+\infty \in \overline{X}$ si et seulement si X n'est pas majoré).

Exemple 5.1.16

Soit f définie sur $\mathbb{Q}$ par $f(x) = \frac{1}{q}$ où $x = \frac{p}{q}$ est la représentation irréductible de x (le signe éventuel se reportant sur p). Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Étudier la limite de $f(x)$ lorsque $x \to a$.

I.4 Limites : point de vue topologique

On peut donner une définition globale à l'aide de la notion de voisinage. On rappelle qu'on a étendu, dans le cas réel, la notion de voisinage au cas des infinis :

Définition 5.1.17 – Voisinage de $+\infty$

Soit $E = \mathbb{R}$.

- On convient d'appeler voisinage de $+\infty$ un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $]\alpha, +\infty[\subset V$.
- On note $\mathcal{V}(+\infty)$ l'ensemble des voisinages de $+\infty$.
- On définit de même $\mathcal{V}(-\infty)$.

Définition 5.1.18 – Voisinage de ∞

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n..

- On convient d'appeler voisinage de ∞ un sous-ensemble $V \subset E$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\complement_E \overline{B}(0, a) \subset V$.
- On note $\mathcal{V}(\infty)$ l'ensemble des voisinages de l'infini.

Remarque 5.1.19

Toute comme dans le cas de voisinages de points finis, l'intersection d'un nombre fini de voisinages de l'infini est encore un voisinage de l'infini.

La notion de voisinage permet de condenser tous les cas distincts pour la définition des limites en un seul. C'est surtout intéressant dans le cas réel où il faut distinguer les infinis au départ et à la source.
Dans la caractérisation suivante, les cas a et/ou $b = \pm\infty$ sont pertinents lorsque A et/ou B est une partie de $\mathbb{R}$ non majorée (resp. non minoré). Le cas $a = \infty$ est pertinent lorsque A n'est pas borné.

Théorème 5.1.20 – Caractérisation topologique des limites

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., $A \subset E$ et $f : A \longrightarrow F$. Soit $a \in \overline{A}$, ou $a \in \{\infty, \pm\infty\}$, et $b \in F$, ou $b = \pm\infty$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a

(ii) $\forall W \in \mathcal{V}(b), \quad \exists U \in \mathcal{V}(a), \quad f(U) \subset V$.

◁ **Éléments de preuve.**

Remarquer que $\|x - a\|_E < \varepsilon$ équivaut à $x \in B(a, \varepsilon)$

Au départ, on passe alors du cas topologique au cas métrique en remarquant que tout voisinage de a contient une boule $B(a,\varepsilon)$, et du cas métrique au cas topologique en remarquant qu'une boule $B(a,\varepsilon)$ est un voisinage de a. Quelle différence à l'arrivée ? ▻

Remarque 5.1.21

On peut aussi avoir des caratérisations mixtes, que j'énonce uniquement dans le cas fini, pour éviter d'avoir à donner trop de cas. Avec les notations de la définition, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers 0 ;

(ii) (métrique/topologique) $\forall W \in \mathcal{V}(b), \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in A, \quad \|x-a\|_E < \eta \Longrightarrow f(x) \in W$
(*i.e.* $f(B(a,\eta)) \subset W$)

(iii) (topologique/métrique) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists V \in \mathcal{V}(a), \quad \forall x \in V \cap A, \quad \|f(x) - b\|_F < \varepsilon$
(*i.e.* $f(V) \subset B(a,\eta)$).

Théorème 5.1.22 – Unicité de la limite

La limite de f en a, si elle existe, est unique. On la note $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

◅ **Éléments de preuve.**

Même principe que pour les limites de suites : si $b_1 \neq b_2$ (y compris infini si on est dans $\mathbb{R}$), on peut trouver $V_1 \in \mathcal{V}(b_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(b_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. ▻

Proposition 5.1.23

Soit $f : A \to F$ admettant une limite en a. Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \in \overline{f(A)}$.

En notant par abus $x \to \infty$ pour désigner $\|x\| \to +\infty$, et $x_n \to \infty$ lorsque $\|x_n\|_E \to +\infty$, on peut généraliser la caractérisation séquentielle que vous connaissez dans le contexte réel.

Théorème 5.1.24 – Caractérisation séquentielle

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$ (éventuellement $a = \infty$, ou $\pm\infty$), et $b \in F$ ou $b \in \overline{\mathbb{R}}$ (si $F = \mathbb{R}$). Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

(ii) $\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \quad (x_n \to a) \Longrightarrow (f(x_n) \to b)$.

◅ **Éléments de preuve.**

- Dans le sens direct, utiliser la caractérisation topologique pour ne pas avoir besoin de distinguer les cas.
- Dans le sens réciproque, raisonner par contraposée, et construire des voisinages collant de plus en plus à a, et dont l'image n'est pas incluse dans un certain voisinage bien choisi de b.

▻

Nous dirons qu'une fonction f admet une propriété $\mathcal{P}$ au voisinage d'un point $a \in \overline{X}$, s'il existe un voisinage V de a dans $\mathbb{R}$ (au sens étendu ci-dessus pour a infini) tel que la propriété $\mathcal{P}$ soit vérifiée par f sur l'ensemble $V \cap X$.
La notion de limite permet alors de « contrôler » une fonction au voisinage d'un point. Ainsi, on obtient par exemple :

Proposition 5.1.25

Soit f une fonction admettant une limite finie en un point a de $\overline{X}$. Alors, f est bornée au voisinage de a.

◁ **Éléments de preuve.**

La définition de la limite par ε donne un encadrement local de f. Comment s'arranger pour ne pas avoir besoin de distinguer les cas de limites en un point fini ou en un point infini ? ▷

Définition 5.1.26 – Coïncidence de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur X et Y et a tel que $a \in \overline{X}$ et $a \in \overline{Y}$. On dit que f et g coincident au voisinage de a si et seulement s'il existe un voisinage V de a dans $\mathbb{R}$ tel que $X \cap V = Y \cap V$ et que

$$\forall x \in X \cap V, \quad f(x) = g(x).$$

Proposition 5.1.27 – Comparaison des limites de deux fonctions coïncidant au vois. de a

Soit f et g deux fonctions coïncidant au voisinage d'un point a. Alors, si f admet une limite (finie ou infinie) en a, alors g aussi, et

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Par voisinage pour ne pas avoir de discussion, en remarquant que si V_0 est un voisinage de a sur lequel f et g coïncide, alors pour tout voisinage U de a, $U \cap V_0$ est un voisinage de a, sur lequel f et g coïncident. ▷

Exemple 5.1.28

Trouver un exemple de fonctions réelles telles que f et g coïncident sur $[a, b]$, et que f admette une limite en a mais par g.

I.5 Opérations sur les limites

La seule opération pertinente dans un e.v.n. quelconque est la combinaison linéaire.

Théorème 5.1.29 – Limite d'une CL

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$. Soit $f, g : A \to F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si f et g admettent une limite en a, alors $\lambda f + g$ aussi, et

$$\lim_{x \to a} (\lambda f + g)(x) = \lambda \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

◁ **Éléments de preuve.**

Critère séquentiel. ▷

Théorème 5.1.30 – Limite d'une composée

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ trois e.v.n., $A \subset E$ et $B \subset F$, et $f : A \to F$ et $g : B \to G$ tels que $f(A) \subset B$. Soit $a \in \overline{A}$, tel que f admette une limite b en a et g admette une limite en b. Alors $g \circ f$ admet une limite en c, et

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \lim_{y \to b} g(y) = \lim_{y \to \lim\limits_{x \to a} f(x)} g(y).$$

Cet énoncé reste vrai dans les cas où a et b peuvent prendre des valeurs $+\infty$, $-\infty$ ou ∞.

◁ **Éléments de preuve.**
Par voisinages, ce qui permet d'englober aussi les cas évoqués tout à la fin. ▷

Remarque 5.1.31
Le théorème de convergence des suites extraites est un cas particulier de ce résultat.

Proposition 5.1.32 – Limite d'une fonction à valeurs dans un produit cartésien
Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n., et $(F_1, \|\cdot\|_{F_1}), \dots (F_p, \|\cdot\|_{F_p})$ une famille finie d'e.v.n.. Soit $f : A \to F_1 \times \cdots \times F_p$ une application définie sur une partie de A. On note, pour $x \in A$,

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)).$$

Soit $a \in A$ (ou éventuellement $a = \pm\infty$ ou $a = \infty$). Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b = (b_1, \dots, b_p)$ (pour la norme produit)

(ii) $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $f_k(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b_k$

En termes plus concis, l'existence d'une limite d'une fonction à valeurs dans un produit cartésien équivaut à l'existence de limites de chacune de ses composantes.

Remarque 5.1.33
La norme produit est la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie sur le produit cartésien. Comme on l'a vu, elle est équivalente aux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, donc cette propriété reste vraie avec ces normes-là.

Exemple 5.1.34
Le cas des limites des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est un cas particulier, la norme usuelle sur $\mathbb{C}$ correspondant à la norme $\|\cdot\|_2$ sur le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ainsi, f admet une limite en a si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire admettent une limite en a.

I.6 Limites partielles

On considère souvent des limites partielles (sur une partie du domaine), notamment dans le cas où une fonction f est définie de façon différente sur diverses parties de son domaine de définition.

Définition 5.1.35 – Limite de f selon X
Soit E et F deux e.v.n. et $A, X \subset F$ deux parties de E. Soit $f : A \to F$. Soit $a \in \overline{A \cap X}$. La limite de f selon X est, si elle existe,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x) = \lim_{x \to a} f_{|X}.$$

L'hypothèse $a \in \overline{A \cap X}$ est nécessaire du fait que $A \cap X$ est le domaine de définition de la restriction $f_{|X}$.

Exemples 5.1.36

1. Pour f une fonction d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la limite à gauche de f en a est la limite selon $]-\infty, a[$.
2. De même, la limite à droite de f en a est la limite selon $]a, +\infty[$.
3. Si $X = \{x_0\}$, a est adhérent à $X \cap A$ si et seulement si $x_0 = a$, et $a \in A$. La limite selon $\{a\}$ est alors $f(a)$.

Vous savez caractériser l'existence d'une limite en un point $a \in \mathbb{R}$ par l'existence et l'égalité des limites à gauche, à droite et de la valeur au point ; c'est-à-dire l'existence et l'égalité des limites selon $]-\infty, a[$, $]a, +\infty$ et $\{a\}$. Voici une généralisation de cette caractérisation

Proposition 5.1.37 – Caractérisation de la limite par les limites partielles

Soit E, F deux e.v.n., $A \subset E$, et $a \in \overline{A}$. Soit $f : A \to F$. Soit $b \in F$. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille *finie* de parties de E tels que :

(i) il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $V \subset \bigcup_{i\in I} X_i$;

(ii) pour tout $i \in I$, $a \in \overline{A \cap X_i}$;

(iii) pour tout $i \in I$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in X_i}} f(x) = b$.

Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Exemple 5.1.38

Étudier la limite en $(x_0, 0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{y}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 5.1.39

Les propriétés sur les limites (et celles sur la continuité qui suivent) sont notamment valides dans le contexte de fonctions $f : A \to \mathbb{R}$, où A est une partie de $\mathbb{R}^n$ (fonction réelle de n variables réelles). Il faut a priori se donner une norme sur $\mathbb{R}^n$, mais comme on le verra dans un chapitre ultérieur, toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, et le choix de la norme importe peu. On peut ainsi choisir la norme qui convient le mieux à l'étude en cours.
Vous pouvez admettre ce point, et utiliser dès à présent dans les exercices l'équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$.

II Continuité

II.1 Continuité en un point

Dans tout le paragraphe, $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux e.v.n., et $A \subset E$ est une partie de E.

Définition 5.2.1 – Continuité

Soit $f : A \to F$ et $a \in A$. On dit que f est continue en a si f admet une limite en a.

Remarque 5.2.2

Le point a est dans le domaine de f. Ainsi, si f est continue en a, la limite en a est nécessairement $f(a)$.

De façon équivalente :

Proposition 5.2.3 – Réexpression métrique et topologique

Soit $f : A \to F$, et $a \in A$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue en a ;

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\quad \|x-a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x)-f(a)\|_F \leqslant \varepsilon$;

(iii) pour tout $W \in \mathcal{V}(f(a))$, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(V) \subset W$.

◁ **Éléments de preuve.**

Équivalences déjà vues dans le cadre des limites. Le seul ingrédient supplémentaire est l'égalité de la limite avec $f(a)$, ce qui, comme on l'a vu, est toujours le cas lorsque a est dans le domaine de f. ▷

Remarque 5.2.4

Comme on l'a vu dans le cadre des limites, les inégalités $\|x-a\|_E \leqslant \eta$ et $\|f(x)-f(a)\|_F \leqslant \varepsilon$ peuvent être indifféremment larges ou strictes.

Définition 5.2.5 – Continuité sur une partie

Soit $f : A \to F$, et $B \subset A$. On dit que f est continue sur B si f est continue en tout point de B.

Avertissement 5.2.6

Cela n'équivaut pas à la continuité de $f_{|B}$. Pouvez-vous trouver un contre-exemple ?

Proposition 5.2.7 – Restriction de l'ensemble source

Si f et g coïncident sur un *voisinage* de a, f est continue en a si et seulement si g est continue en a.

◁ **Éléments de preuve.**

On a déjà vu dans cette situation l'équivalence de l'existence des limites, et leur égalité. ▷

Corollaire 5.2.8

Soit f et g définies sur $A \subset E$, et U un ouvert tel que $U \cap A \neq \varnothing$. Alors, si $f_{|U\cap A} = g_{|U\cap A}$ et si g est continue sur $U \cap A$, alors f aussi.

Exemple 5.2.9

Étude de la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{y}} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, on traduit dans le cadre de la continuité la caractérisation séquentielle de la limite.

Proposition 5.2.10 – Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit $f : A \to F$ une application définie sur une partie A d'un e.v.n. E, et $a \in A$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) f est continue en a ;

(ii) pour tout $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, $(u_n \to a) \Longrightarrow (f(u_n) \Longrightarrow f(a))$.

◁ **Éléments de preuve.**

Conséquence directe de la caractérisation séquentielle pour les limites, et de la valeur de la limite lorsque a est dans le domaine. ▷

II.2 Opérations sur les fonctions continues

Les opérations sur les limites ont pour corollaire immédiat les opérations similaires sur les fonctions continues.
On considère toujours $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et A une partie de E, et $a \in A$.

Proposition 5.2.11 – Continuité d'une combinaison linéaire

Soit $f, g : A \to F$, et $\lambda : A \to \mathbb{K}$. Si f, g et λ sont continues en a, alors $\lambda f + g$ aussi.

Proposition 5.2.12 – Continuité d'un produit et d'un inverse

On suppose que F est une algèbre, et que $\|\cdot\|_F$ est une norme d'algèbre. Soit $f, g : A \to F$.

1. Si f et g sont continues en a, alors fg aussi.
2. Si $f(x)$ est inversible au voisinage de a, alors $x \mapsto f(x)^{-1}$ est continue en a.

Attention, il s'agit de l'inverse point par point, et non de la fonction réciproque !

Proposition 5.2.13 – Continuité d'une fonction à valeurs dans un produit cartésien

On suppose que $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ où $(F_k, \|\cdot\|_{F_k})$ sont des e.v.n., et que $\|\cdot\|_F$ est la norme produit $\|\cdot\|_\infty$. Soit $f = (f_1, \dots, f_p) : A \to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) f est continue en a ;

(ii) pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, f_k est continue en a.

Remarque 5.2.14

1. Cela reste valide en remplaçant la norme produit par $\|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_2$ qui lui sont équivalentes.
2. En particulier, cela permet d'étudier la continuité d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ en étudiant chacun de ses coordonnées, si $\mathbb{R}^n$ est muni d'une des 3 normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$, ou plus généralement de n'importe quelle norme, en admettant provisoirement l'équivalence des normes en dimension finie.

II.3 Continuité uniforme, fonctions lipschitziennes

La notion de continuité traduit le fait que localement, $f(x)$ approche $f(a)$ à ε près fixé arbitrairement à l'avance. L'aspect local de cette approximation se traduit par ε intervenant dans la définition : ε nous donne le domaine de validité de l'approximation. Plus ε est petit, plus il faut rester proche de x pour que l'approximation soit correcte. La taille de ce domaine de validité peut d'ailleurs dépendre de x. En général, il n'y a pas de raison de pouvoir trouver un réel η convenant pour toutes les valeurs de x du domaine de définition d'une fonction continue. Cela signifie que, une marge ε étant donnée, il peut exister des points pour lesquels il faudra rester très très proche (infiniment proche si on fait tendre x vers un des bords du domaine) de x pour que l'approximation à ε près reste vraie.

Exemples 5.2.15

1. $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.
2. $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$.

Si pour tout ε, on peut trouver un η convenable pour toute valeur de x, on parlera de continuité uniforme. Remarquez qu'il ne s'agit de rien de moins que d'une interversion de quantificateurs par rapport à la définition de la continuité sur un domaine.

Définition 5.2.16 – Continuité uniforme

Soit $f : A \to F$ une fonction définie sur une partie A d'un e.v.n. E. Soit $B \subset A$. On dit que f est uniformément continue sur B si

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists \eta > 0,\quad \forall (x, y) \in B^2,\quad \|x - y\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Le réel η est appelé *module de continuité uniforme de f pour l'approximation ε*

Proposition 5.2.17 – Continuité uniforme implique continuité

Soit $f : A \to F$ et $B \subset A$. Si f est uniformément continue sur B, elle est continue sur B.

◁ **Éléments de preuve.**
Évident : c'est juste enlever une contrainte de dépendance. ▷

Proposition 5.2.18 – Critère séquentiel de la continuité uniforme

Soit $f : A \to F$ une fonction définie sur une partie A d'un e.v.n. E. Soit $B \subset A$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est uniformément continue sur B

(ii) Pour toutes suites (x_n) et (y_n) d'éléments de X telles que $x_n - y_n \to 0$, on a aussi $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

◁ **Éléments de preuve.**
Le sens direct est une conséquence immédiate de la définition de la continuité uniforme et de la convergence de suites. Réciproquement, raisonner par la contraposée. ▷

Un exemple important de classe de fonctions uniformément continues est la classe des fonctions lipschitziennes.

Définition 5.2.19 – Applications lipschitziennes

Soit $f : A \to F$ une application définie sur une partie A d'un e.v.n. E. Soit $B \subset A$. Soit $k \in \mathbb{R}_+$.

- On dit que f est k-lipschitzienne sur B si

$$\forall (x, y) \in B^2,\quad \|f(x) - f(y)\|_E \leqslant k\|x - y\|_F.$$

- On dit dans ce cas que k est un facteur de Lipschitz pour la fonction f sur B.
- On dit que f est lipschitzienne sur B s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit k-lipschitzienne.
- On dit que f est contractante s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Proposition 5.2.20 – Lipschitz implique u.c.

Une application lipschitzienne sur B est uniformément continue sur B.

II.4 Exemples importants de fonctions continues

Proposition 5.2.21 – Continuité de la norme

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n.. L'application $x \mapsto \|x\|_E$ de E dans $\mathbb{K}$ est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue sur E.

◁ **Éléments de preuve.**
Par inégalité triangulaire. ▷

Proposition 5.2.22 – Continuité de la distance à une partie

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, et $A \subset E$ une partie non vide. L'application $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne donc uniformément continue sur E.

◁ **Éléments de preuve.**
Majorer $d(x,z) - d(y,z)$ par IT, puis $d(x,A) - d(y,A)$, puis intervertir les rôles. ▷

Proposition 5.2.23 – Continuité de la projection

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n.. On munit $E \times F$ de la norme produit. Alors les projections $p_E : E \times F \to E$ et $p_F : E \times F \to F$ définies par

$$p_E(x,y) = x \qquad \text{et} \qquad p_F(x,y) = y$$

sont uniformément continues sur $E \times F$.

◁ **Éléments de preuve.**
Probablement encore un coup de M. Rudolf Lipschitz. ▷

Voici un corollaire qui permet souvent de se ramener à la continuité de fonctions usuelles d'une variable.

Corollaire 5.2.24

Soit $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ trois e.v.n., et $f : E_1 \to F$ une application continue. Alors

$$\tilde{f} = \left\{ \begin{array}{rcl} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & F \\ (x,y) & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

est continue.

◁ **Éléments de preuve.**
Composer par la projection. ▷

Exemple 5.2.25

Étudier la continuité pour $\|\cdot\|_\infty$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \big(\sin(x)\cos(y), \mathrm{e}^{x+y}\big) \, .$$

Un autre résultat, permettant de travailler « à isomorphisme près » (par exemple en assimilant $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$ sur E à $\|\cdot\|_\infty$ sur l'espace $\mathbb{K}^n$ des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$) :

Théorème 5.2.26 – Continuité de l'isomorphisme de transfert

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $\varphi : E \to F$ un isomorphisme. Soit $\|\cdot\|_F$ une norme sur F, et $\|\cdot\|_E$ la norme sur E induite par φ. Alors φ et φ^{-1} sont 1-lipschitziennes donc continues (pour ces normes).

◁ **Éléments de preuve.**
Ce sont même des isométries ! ▷

II.5 Prolongements

Proposition/Définition 5.2.27 – Prolongement par continuité

Soit $f : A \to F$ définie sur une partie A d'un e.v.n., et continue sur A. Soit $a \in \overline{A} \backslash A$ tel que $f(x)$ admet une limite $b \in F$ lorsque x tend vers a.
Alors il existe une unique fonction $\tilde{f} : A \cup \{a\} \to F$, coïncidant avec f sur A et continue sur $A \cup \{a\}$.
Elle est définie par :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \lim\limits_{y \to a} f(y) & \text{si } x = a. \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ est appelée prolongement par continuité de f en a.

Les situations de densité permettent aussi d'obtenir des propriétés d'unicité de prolongements.

Proposition 5.2.28 – Coïncidence sur une partie dense

Soit $f, g : A \to F$ deux applications continues sur A, et B une partie de E dense dans A. Si f et g coïncident sur B, alors $f = g$.

Corollaire 5.2.29

Soit A une partie de E et $B \subset A$ une partie dense dans A. Soit $f : B \to F$ une application continue. Alors f admet au plus un prolongement g défini et continu sur A.

Exemple 5.2.30

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$.

III Continuité et topologie

III.1 Images réciproques d'ouverts et fermés

Comme souvent, les images réciproques donnent des propriétés plus simples que les images directes (surtout du fait d'une quantification en moins dans la définition, ce qui permet d'échapper aux problèmes d'interversion de quantificateurs).

Théorème 5.3.1 – Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé

Soit $f : A \to F$ une application continue sur A, partie d'un e.v.n. E.

1. Pour tout U ouvert de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif de A.
2. Pour tout C fermé de F, $f^{-1}(C)$ est un fermé relatif de A.

Ce théorème est notamment très utile pour montrer de façon efficace que certaines parties de $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts ou des fermés.

Exemples 5.3.2

1. Le demi-plan de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x \geqslant 0$ est un fermé.
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 3y + 2 \text{ et } x^2 > y\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Redémontrer le fait que $\overline{B}(a, r)$ et $S(a, r)$ sont des fermés de E, et que $\mathring{B}(a, r)$ est un ouvert.

Comme on l'avait annoncé plus haut :

Théorème 5.3.3 – $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ **est un ouvert de** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Tout est dit dans le titre (et ceci indépendamment de la norme, si on admet l'équivalence des normes en dimension finie).

◁ **Éléments de preuve.**
Quelle fonction continue permet de caractériser l'inversibilité ? ▷

Avertissement 5.3.4

En général, l'image directe d'un ouvert (resp. fermé) par une fonction continue n'est pas ouvert (resp. fermé)

Exemple 5.3.5

Trouvez (graphiquement) des exemples dans le cas de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pour les fermés, c'est cependant presque vrai, avec une petite condition en plus (la compacité).

III.2 Fonction continue sur compact

Théorème 5.3.6 – Théorème de compacité

L'image par une fonction continue $f : A \to F$ d'une partie compacte $K \subset A$ est une partie compacte de F

◁ **Éléments de preuve.**
La continuité permet de préserver la convergence d'une suite extraite. ▷

Corollaire 5.3.7 – Théorème des bornes atteintes

Soit $f : K \to \mathbb{R}$ définie sur une partie K compacte d'un e.v.n. E. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

◁ **Éléments de preuve.**
Par le théorème de compacité, $f(K)$ est fermé et borné. Donc $\sup f(K) \in f(K)$. ▷

Remarque 5.3.8

1. On retrouve l'énoncé de première année dans le cadre de fonctions définies sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ en remarquant qu'un intervalle $[a, b]$ est compact.
2. L'importance de ce théorème se fait particulièrement sentir dans le cadre de la recherche d'extremas globaux : le théorème des bornes atteintes se réexprime en effet en disant qu'une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ définie sur un compact admet un minimum et un maximum sur $\mathbb{K}$.

Exemple 5.3.9

Soit P une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^2$ prenant au moins une valeur strictement positive Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} P(x, y)$$

admet un maximum global.

Une autre propriété des fonctions continues sur un compact généralise une propriété de première année.

Théorème 5.3.10 – Heine

Une fonction continue sur un compact K est uniformément continue sur K.

◁ **Éléments de preuve.**
De même que le cas réel, par contraposée, en niant le critère séquentiel. ▷

IV Connexité

On cherche dans cette partie à généraliser le théorème des valeurs intermédiaires.

IV.1 Parties connexes par arcs

Définition 5.4.1 – Arc, ou chemin continu

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n., et $(a, b) \in E^2$. Un arc continu (ou chemin continu) de a à b est une application continue $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Remarque 5.4.2

Faites un dessin pour illustrer la notion !

Soit A une partie de E. On peut définir une relation sur A par

$$a\mathcal{R}b \iff \text{il existe un arc continu reliant } a \text{ à } b.$$

Proposition/Définition 5.4.3 – Composantes connexes de A

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de A pour cette relation sont appelées composantes connexes de A.

Définition 5.4.4 – Partie connexe par arcs

Soit A une partie d'un e.v.n. E. On dit que A est connexe par arcs si A ne possède qu'une seule composante connexe, donc si pour tout $(a, b) \in A^2$, il existe un arc continu γ reliant a à b.

Exemple 5.4.5

1. Déterminer les composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}^*$
2. Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.
3. Montrer que le « plan fendu » $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est connexe par arcs
4. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est-il connexe par arc ?
5. Étudier la connexité par arcs de $S(a, r)$ dans un e.v.n..

Définition 5.4.6 – Partie étoilée

Soit A une partie d'un e.v.n. E.

(i) On dit que A est étoilée par rapport à $a \in A$ si pour tout $b \in A$, le segment $[a, b]$ est inclus dans A, c'est-à-dire :
$$\forall t \in [0,1], \quad f((1-t)a + tb) \in A.$$

(ii) On dit que A est étoilée s'il existe a tel que A soit étoilée par rapport à A.

Proposition 5.4.7

Une partie convexe est étoilée.

Proposition 5.4.8 – Étoilé implique connexe

Soit A une partie d'un e.v.n. E.

- Si A est étoilée, alors A est connexe par arcs.
- En particulier, toute partie convexe est connexe par arcs.
- En particulier, les boules (ouvertes ou fermées) sont connexes par arcs.

◅ **Éléments de preuve.**
On peut joindre b à c en 2 temps, en faisant un petit détour. ▻

Exemple 5.4.9

1. On retrouve la connexité par arcs des boules.
2. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est connexe par arcs.

Proposition 5.4.10 – Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

IV.2 Image continue d'une partie connexe par arcs

Le théorème suivant est une généralisation du TVI.

Théorème 5.4.11 – Image continue d'un connexe par arcs

Soit $f : A \to F$ une fonction continue sur une partie connexe par arcs A de E. Alors $f(A)$ est aussi connexe par arcs.

Dans le cas où $E = F = \mathbb{R}$, les connexes par arcs étant les intervalles, on retrouve le fait que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, qui est l'un des énoncés possibles du TVI.
On peut se servir de cette propriété pour montrer que certains ensembles ne sont pas connexes par arcs.

Exemple 5.4.12

1. En considérant det, montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
2. De même pour $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

V Continuité des applications linéaires

On termine ce chapitre par l'étude de la continuité des applications linéaires entre deux e.v.n..

Théorème 5.5.1 – Caractérisation de la continuité d'une AL

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) u est continue sur E ;

(ii) u est continue en 0 ;

(iii) il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_E \leqslant k\|x\|_F$

(iv) $u(\overline{B}(0,1))$ est borné.

(v) $u(S(0,1))$ est borné.

Définition 5.5.2 – Norme subordonnée

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire continue. On définit

$$|||u||| = \sup_{x \in S(0,1))} \|u(x)\|_F = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

On dit que $|||u|||$ est la norme subordonnée (aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$) de l'application linéaire continue u.
On parle aussi de norme triple, ou de norme d'opérateur, et on rencontre parfois la notation $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$.

Exemples 5.5.3

1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n.. Déterminer $|||\mathrm{Id}_E|||$.
2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ sur les coefficients, et $a \in]-1,1[$. Montrer que $u : P \mapsto P(a)$ est continue, et déterminer $|||u|||$. Que dire lorsque $|a| > 1$?

Proposition 5.5.4 – L'e.v.n. $\mathcal{L}_c(E,F)$

Soit $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Alors $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-ev, et $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Proposition 5.5.5 – Sous-multiplicativité de $|||\cdot|||$

Soit E, F et G trois e.v.n., et $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, $v \in \mathcal{L}_c(F,G)$. Alors $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E,G)$, et

$$|||v \circ u||| \leqslant |||v||| \cdot |||u|||.$$

Corollaire 5.5.6

La norme $|||\cdot|||$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_c(\mathbb{R})$.

Exemple 5.5.7

Donner un exemple montrant qu'on peut avoir $|||u \circ v||| < |||u||| \cdot |||v|||$.

On généralise l'étude de la continuité des applications linéaires au cas des applications multilinéaires.

Théorème 5.5.8 – Caractérisation de la continuité des applications multilinéaires

Soit $E_1, \dots, E_n, F$ des e.v.n., de normes $\|\cdot\|_{E_1}, \dots, \|\cdot\|_{E_n}$, $\|\cdot\|_F$. Soit $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application n-linéaire. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) φ est continue ;

(ii) φ est continue en $(0, \dots, 0)$;

(iii) il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(x_1, \dots, x_n)$,

$$\|\varphi(x_1, \dots, x_k)\|_F \leqslant k \prod_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i}.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Le démonstration n'est pas exigible.

- $(ii) \Longrightarrow (iii)$: Dans le sens direct, prendre $k = \frac{1}{\eta^n}$, où η est tel que

$$\|x_1, \dots, x_k\|_F \leqslant \eta \Longrightarrow \|\varphi(x_1, \dots, x_k))\| \leqslant 1.$$

- $(iii) \Longrightarrow (i)$ Faire un télescopage (comme pour la continuité d'un produit), de sorte à former une différence $y_i - x_i$ sur l'une des coordonnées dans chaque terme.

▷

Exemples 5.5.9

1. L'application $\mathbb{K} \times E \to E$, telle que $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$.
2. L'application d'évalution $\mathcal{L}_c(E, F) \times E \to F$ telle que $(u, x) \mapsto u(x)$.
3. L'application $\mathcal{L}_c(E, F) \times \mathcal{L}_c(F, G) \to \mathcal{L}_c(E, G)$ telle que $(u, v) \mapsto v \circ u$.
4. Si E est un espace euclidienne, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est continue.
5. Si E est une algèbre tel que $\|\cdot\|_E$ est une norme d'algèbre, le produit $(x, y) \mapsto xy$ de $E \times E$ dans E.
6. Retrouver avec l'exemple précédent la propriété de continuité d'un produit de deux fonctions à valeurs dans une algèbre muni d'une norme d'algèbre (donc même si cette propriété n'est pas au programme, on la retrouver facilement avec les résultats au programme).

VI E.v.n. de dimension finie, et conséquences sur la continuité

VI.1 Équivalence des normes

Nous avons déjà évoqué ce théorème d'une importance capitale :

Théorème 5.6.1 – Équivalence des normes en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les normes définies sur E sont équivalentes

◁ **Éléments de preuve.**

Fixer une base $\mathcal{B}$ et comparer une norme N quelconque à la norme $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$.

- Dans un sens, c'est évident par IT et majoration des coordonnées.
- Dans l'autre, utiliser la deuxième IT et la majoration précédente pour montrer que N est lipschitzienne donc continue. Terminer en utilisant la compacité de $B(0, 1)$ pour $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$.

▷

Un espace de dimension finie pouvant toujours être muni d'une norme (par exemple la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$ associée à une base), on a une topologie naturelle d'e.v.n. unique, indépendante de la norme choisie. En particulier, toutes les propriétés de continuité et de convergence sont les mêmes quelle que soit la norme choisie. Le caractère borné est aussi préservé d'une norme à l'autre.
Il en résulte que le choix de la norme n'a pas beaucoup d'importance, et en général, elle ne sera pas préciser. Parler de convergence ou de continuité dans un espace de dimension finie E, sans préciser de norme, se réfère de façon implicite à la topologie définie par l'une quelconque des normes qui peuvent être définies sur E.
Ce théorème nous permet notamment de choisir une norme à notre convenance, dans le but de simplifier les calculs et les majorations, certaines normes pouvant être plus pratiques que d'autres suivant le contexte. Ainsi, comme on l'a déjà vu, il peut être intéressant, dans un contexte matriciel (donc en dimension finie), d'utiliser une norme matricielle (donc sous-multiplicative).
En particulier, la convergence peut toujours s'étudier avec la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$, ce qui permet de justifier le résultat suivant.

Corollaire 5.6.2 – Caractérisation de la convergence par les coordonnées en dim finie

Soit (E, N) un e.v.n. de dimension finie, et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_d)$ une base de E, (E', N') un e.v.n. quelconque, $A \subset E'$ et $a \in \overline{A}$. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $f \in E^A$ décomposées sur la base $\mathcal{B}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=1} u_{n,k} b_k \qquad \text{et} \qquad \forall x \in A, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{d} f_k(x) b_k.$$

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $L = (\ell_1, \dots, \ell_d)$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, $(u_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_k.
2. L'application f admet une limite $L = (\ell_1, \dots, \ell_d)$ lorsque x tend vers a si et seulement si pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, $f_k(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_k$.
3. L'application f est continue en $b \in A$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, f_k est continue en b.

Autrement dit, la convergence (de suites, de fonctions) et la continuité peuvent s'étudier coordonnée par coordonnée.

Exemple 5.6.3

Trouver dans $\mathbb{R}[X]$ une suite non convergente pour la norme $\| \cdot \|_\infty$ sur les coefficients, mais convergeant coordonnée par coordonnée dans la base canonique.

Avertissement 5.6.4

On peut définir des métriques sur E associées à d'autres topologies ! Ainsi, l'unicité de la topologie sur E de dimension finie est valide dans le contexte où on ne regarde que les topologies issues de normes.

VI.2 Conséquences topologiques

Comme on l'a vu, en dimension finie, la topologie définie par une norme ne dépend pas du choix de la norme. Cela implique en particulier que certaines propriétés vues dans le cadre d'une norme donnée restent valides pour toutes les normes. En particulier :

Théorème 5.6.5 – Bolzano-Weierstrass en dimension finie

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un e.v.n. de dimension finie. Alors toute suite bornée de vecteurs de E admet une valeur d'adhérence.

◁ **Éléments de preuve.**

Cela avait été démontré pour $\| \cdot \|_{\mathcal{B},\infty}$, après choix d'une base. Par équivalence des normes, cela reste vrai pour toute norme. ▷

Corollaire 5.6.6 – Caractérisation des compacts en dimension finie

Soit E un e.v.n. de dimension finie, et $K \subset E$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) K est compact ;

(ii) K est fermé et borné.

◁ **Éléments de preuve.**

Un sens a déjà été vu. L'autre résulte de BW et du caractère fermé. ▷

Corollaire 5.6.7 – Compacité des boules en dimension finie

Soit E un e.v.n. de dimension finie, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. La boule fermée $\overline{B}(a,r)$ est un compact.

Corollaire 5.6.8 – Caractérisation de la convergence par les v.a. dans un e.v.n. de dim finie

Soit E un e.v.n. de dimension finie, et (u_n) un suite bornée. Alors (u_n) converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

◁ **Éléments de preuve.**
(u_n) est à valeurs dans une boule fermée, donc compacte. ▻

Théorème 5.6.9 – Propriété topologique des sous-espaces

Soit E un e.v.n. de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est fermé.

◁ **Éléments de preuve.**
Utiliser une base de E complétée d'une base de F, et utiliser la caractérisation séquentielle des fermées, en travaillant sur cette base. ▻

Exemple 5.6.10

Soit E l'espace des suites réelles telles que $\sum \frac{|u_n|}{n^2}$ converge. Pour $u = (u_n)$, on définit

$$N(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n^2}.$$

Soit F le sous-espace de E des suites à support fini (donc nulles àpcr). Montrer que N est une norme sur E, et que F n'est pas fermé (on pourra constuire une suite d'éléments de F convergeant vers la suite constante de valeur 1).

VI.3 Conséquences sur la continuité des applications linéaires

Théorème 5.6.11 – Continuité des AL en dimension finie

Soit E, F deux e.v.n.. Si E est de dimension finie, toute application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est continue, donc

$$\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F).$$

◁ **Éléments de preuve.**
Munir E d'une norme $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$, et majorer $u(\overline{B}(0,1))$. ▻

La norme triple $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ peut donc être définie sur $\mathcal{L}(E,F)$ tout entier.
Si F est lui-même de dimension finie, $\mathcal{L}(E,F)$ est isomorphe à un espace de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Plus précisément, $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ représente une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, définie par

$$X \mapsto MX.$$

Ainsi, quelle que soit la norme $\|\cdot\|_n$ choisie sur $\mathbb{K}^n$ et la norme $\|\cdot\|_p$ choisie sur $\mathbb{K}^p$, l'application linéaire définie par M est continue, ce qui permet de définir la norme triple associée à M

Définition 5.6.12 – Norme triple associée à une matrice

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La norme triple de M (coordonnée aux normes $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_n$ de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$) est définie par

$$\|\|M\|\| = \sup_{X\in\mathbb{K}^p\setminus\{0\}} \frac{\|MX\|_n}{\|X\|_p} = \sup_{X\in\overline{B}(0,1)\setminus\{0\}} \frac{\|MX\|_n}{\|X\|_p} = \sup_{X\in S(0,1)} \frac{\|MX\|_n}{\|X\|_p}.$$

Proposition 5.6.13 – Encore une norme matricielle

La norme triple est matricielle (*i.e.* sous-multiplicative) : si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et si la norme utilisée sur $\mathbb{K}^p$ est la même pour définir $\|\|N\|\|$ et $\|\|M\|\|$, alors

$$\|\|MN\|\| \leqslant \|\|M\|\| \cdot \|\|N\|\|.$$

◁ **Éléments de preuve.**
On l'a déjà vu dans le contexte des AL continues. ▷

Plus généralement,

Théorème 5.6.14 – Continuité des applications multilinéaires en dimension finie

Soit $E_1, \dots, E_p, F$ des e.v.n.. Si les E_k, $k \in [\![1, p]\!]$ sont de dimension finie, alors toute application multilinéaire $u : E_1 \times \cdots \times E_p \to F$ est continue.

◁ **Éléments de preuve.**
Récurrence sur p. ▷

Exemples 5.6.15

1. Soit E de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B}$. Le déterminant $\det_{\mathcal{B}} : E \to \mathbb{K}$ est multilinéaire sur E, donc continue, quelle que soit la norme de E.
2. $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue par rapport à ses colonnes, pour n'importe quelle norme sur l'espace $\mathbb{K}^n$ des colonnes.
3. $(M, N) \mapsto MN$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ est continue.
4. De même, la composition des AL entre espaces de dimension finie.

VI.4 Applications polynomiales

Définition 5.6.16 – Application polynomiales de n variables

Soit $A \subset \mathbb{K}^n$ et $f : A \to \mathbb{K}$. On dit que f est une application polynomiale si f est une combinaison linéaire d'applications

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n},$$

où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$.

Exemple 5.6.17

L'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = 3x^2yz^4 - xy + 2$ est une application polynomiale.

Proposition 5.6.18

Les applications polynomiales sont continues sur leur domaine de définition, et ceci indépendamment des normes choisies.

◁ **Éléments de preuve.**
Travailler avec la norme ∞ pour obtenir la continuité des projections, puis les règles sur le produit permettent de conclure. ▷

Exemple 5.6.19

Étudier la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f : (x, y) \mapsto \left(\ln(x^2 + xy + y^2 + 1), \frac{2\cos(xy)}{x^2 + y^4 + 1}\right)$$

Théorème 5.6.20 – Continuité de tr et det

tr : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ et det : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ sont continues en tant qu'applications de n^2 variables réelles.

◁ **Éléments de preuve.**

Avec ce point de vue, tr et det sont polynomiales. La continuité de tr provient également de sa linéarité (et de la dimension finie). ▷

Plus généralement, on peut définir des applications polynomiales sur un espace quelconque :

Définition 5.6.21 – Application polynomiale

Soit E et F deux espaces de dimension finie, et $f : E \to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F tels que les coordonnées $f_k(x)$ de $f(x)$ sur $\mathcal{C}$ soient polynomiales en les coordonnées de x sur $\mathcal{B}$;

(ii) Pour toute base $\mathcal{B}$ de E et toute base $\mathcal{C}$ de F, les coordonnées $f_k(x)$ de $f(x)$ sur $\mathcal{C}$ sont polynomiales en les coordonnées de x sur $\mathcal{B}$;

On dit dans ce cas que f est une application polynomiale.

En travaillant coordonnée par coordonnée (sur F) avec la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$ sur E, les raisonnements ci-dessus s'adaptent bien, et on obtient :

Proposition 5.6.22 – Continuité des applications polynomiales

Soit E et F des espaces de dimension finie, et $f : E \to F$ une application polynomiale. Alors f est continue.