11

Intégrales à paramètres

Le but de ce chapitre est d'étudier le comportement d'intégrales à paramètres.
Il s'agit donc d'étudier une famille de fonctions $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ intégrables sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Leurs intégrales définissent une famille $\left(\int_I f_\lambda(t)\ \mathrm{d}t\right)_{\lambda\in\Lambda}$, donc on cherche à étudier le comportement par rapport au paramètre λ.
Le contexte initial (qui est à la source des autres études) concerne un paramètre entier (*i.e.* $\Lambda = \mathbb{N}$). On dispose donc d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ intégrables sur $\mathbb{N}$, et on s'intéresse à la limite de la suite $\left(\int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Nous nous intéresserons ensuite au cas où le paramètre λ est pris dans une partie Λ d'un e.v.n. de dimension finie. Nous adopterons dans ce contexte plutôt une représentation fonctionnelle de la famille, qui peut alors être décrite par une application :

$$\begin{array}{rcl} f : \Lambda \times I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f(x,t). \end{array}$$

Leurs intégrales définissent donc une application de Λ dans $\mathbb{K}$

$$\begin{array}{rcl} g : \Lambda & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t \end{array}$$

On s'intéressera dans ce contexte au propriétés relatifs aux limites et à la continuité.
Enfin, dans un contexte un peu plus restreint où Λ est un intervalle de $\mathbb{R}$, on s'intéressera aux problèmes de dérivabilité de g.

I Suites et séries d'intégrales

Dans toute cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, E désigne un e.v.n. de dimension finie, et (f_n) désigne une suite d'applications de I dans E. Les premiers résultats ont déjà été vus dans des contextes divers, et le but est ici de les regrouper afin d'avoir une meilleure vue d'ensemble sur les différents outils à disposition pour l'étude des intégrales de suites ou séries de fonctions.

I.1 Interversion limite/intégrale

Lorsque I est un segment, on dispose d'un outil particulier, déjà vu dans un chapitre antérieur, lié à la convergence uniforme.

Théorème 11.1.1 – interversion lim/intégrale en cas de CVU

On suppose que :

(i) I est un segment ;

(ii) les applications (f_n) sont continues ;

(iii) la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I.

Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Nous avions montré un résultat plus général, concernant la convergence uniforme d'une suite de primitives.

Exemple 11.1.2

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \tan(x)^{\ln n}\ \mathrm{d}x$.

Proposition 11.1.3 – Extension du théorème d'interversion limite/intégrale

Le théorème d'interversion limite/intégrale par CVU reste vrai sous les hypothèses suivantes :

(i) I est un segment ;

(ii) les (f_n) sont c.p.m. (ou plus généralement Riemann-intégrable)

(iii) (f_n) converge uniformément vers une fonction f

(iv) la fonction f est c.p.m. (ou plus généralement Riemann-intégrable)

La quatrième hypothèse remplace les hypothèses plus fortes de l'énoncé principal, qui assuraient la continuité de f.

Cela permet d'englober le cas des fonctions en escaliers.

Méthode 11.1.4

Si certains points empêchent la CVU, ou si l'intégrale n'est pas définie sur tout le segment on peut soit se rabattre sur le théorème de convergence dominé, soit, si ce n'est pas possible, couper autour de la borne.

Exemple 11.1.5

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{pi}{4}} \tan(x)^n\ \mathrm{d}x$

L'outil le plus efficace, et plus général que le précédent (puisque valide sur des intervalles quelconques) reste le suivant, qu'on a déjà donné, sans le démontrer/

Théorème 11.1.6 – Théorème de convergence dominée, TCD

Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est c.p.m.

(ii) (f_n) converge simplement vers une fonction f

(iii) (hyp. de domination) il existe $\varphi : I \to \mathbb{K}$ intégrable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$.

Alors les (f_n) et f sont intégrables sur I et $\displaystyle\int_I f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f$.

Exemples 11.1.7

1. Reprendre les exemples précédents, y compris celui où on n'avait pas CVU sur tout l'intervalle.
2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \, \mathrm{d}x$.
3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (x+n)\mathrm{e}^{-\sqrt{n}x} \, \mathrm{d}x$

Remarques 11.1.8

1. Lorsque la suite (f_n) est décroissante (ce qui est le cas des premiers exemples), alors on pourra toujours dominer la suite par f_0, à condition qu'elle soit intégrable.
2. Lorsque la suite est croissante, et que la limite f est intégrable, alors on pourra dominer (f_n) par f. C'est le cas du deuxième exemple.
3. Le dernier exemple montre un cas où (f_n) n'est ni croissante ni décroissante.

I.2 Intégration terme à terme

Nous avons vu que le théorème d'interversion limite/intégrale dans de cas CVU s'adapte bien au cas des séries :

Théorème 11.1.9 – interversion $\sum$ / $\int$ par CVU sur un segment

Soit (f_n) une suite de fonctions d'un intervalle I à valeurs dans un e.v.n. F de dimension finie, et soit $a \in I$.

1. Si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur I, alors
$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t) \, \mathrm{d}t$$
converge uniformément sur I vers $x \mapsto \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t$.
2. En particulier, si $\sum f_n$ est uniformément convergente sur $[a,b]$,
$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}t.$$

L'intégrabilité sur un segment quelconque I n'ayant été définie que pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, les autres énoncés se placent dans ce contexte ; ils peuvent s'adapter sans réelle difficulté au cadre d'e.v.n. de dimension finie, en regardant coordonnée par coordonnée dans une base.

Théorème 11.1.10 – Intégration terme à terme, cas positif

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geqslant 0$;

(ii) $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement vers une fonction S

(iii) S est continue par morceaux sur I

Alors, l'égalité suivante est toujours vérifiée dans $\overline{\mathbb{R}}_+$:
$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Démonstration hors programme. Elle reste abordable avec le TCD.

1. Si $\sum f_n$ est intégrable, dominer la somme partielle par la somme totale et utiliser le TCD
2. Sinon, on a divergence sur une des deux bornes de I, disons la borne supérieure. Soi $a \in I$. Justifier qu'il existe x_0 tel que pour tout $x \geqslant x_0$,
$$\int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x \geqslant A,$$
A étant posé arbitrairement. Utiliser encore le TCD sur $[a, x]$, pour montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$ est minoré par tout A réel.

▷

Remarque 11.1.11

En particulier, si les f_n sont positifs, on peut justifier l'intégrabilité de $\sum_{n=0} f_n$ en majorant $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\, \mathrm{d}t$.

Exemple 11.1.12

1. Intégrabilité de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^3+n^3}$ sur $[0, +\infty[$?
2. Intégrabilité de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2t^2}$ sur $[0, +\infty[$.
3. Calculer $\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n^4}]}$
4. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\, \mathrm{d}t$, en fonction de $\zeta(2)$.

Remarques 11.1.13

1. Le TITT positif peut s'utiliser dans des cas où on n'a pas convergence uniforme, et permet donc de gérer des cas plus variés que le théorème d'interversion $\sum / \int$ par CVU. C'est par exemple le cas du troisième exemple.
2. Le dernier exemple montre une situation typique dans laquelle on combine un développement en série et une intégration terme à terme pour calculer une intégrale. Les exemples de ce type sont nombreux, pensez-y !
3. Le point le plus délicat à justifier dans le cas positif est souvent la c.p.m. de la somme. Le programme stipule explicitement de ne pas trop s'attarder sur ces justifications.

Théorème 11.1.14 – Intégration terme à terme, cas général

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \to \mathbb{K}$. On suppose que :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable

(ii) $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge simplement vers une fonction S ;

(iii) S est c.p.m. sur I ;

(iv) $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)|\, \mathrm{d}t < +\infty$.

Alors S est intégrable sur I, et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Démonstration hors-programme. On peut le démontrer un peu plus facilement sous une hypothèse supplémentaire, en supposant de plus $\sum |f_n|$ c.p.m.. ▷

Exemple 11.1.15

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\ \mathrm{d}t$ sous forme d'une somme de Riemann alternée.

Remarque 11.1.16

Remarquez la similitude entre ces résultats d'intégration terme à terme, et les théorèmes de Fubini pour les familles sommables (version positive dans $\overline{\mathbb{R}}$, et version générale). D'ailleurs, les théorèmes de Fubini peuvent se retrouver à partir des théorèmes d'ITT, en considérant des fonctions en escalier f_n prenant la valeur $a_{n,p}$ sur l'intervalle $[p, p+1[$. Ces théorèmes peuvent être vus comme une version continue/discrète des théorèmes de Fubini discret/discret. Il en existe aussi une version pour les intégrales doubles (version continue/continue), mais celle-ci n'est pas au programme.

Méthode 11.1.17 – Si $\sum \int_I |f_n| = +\infty$

Dans le cas où les conditions du TITT ne sont pas vérifiées, on peut parfois utiliser le TCD sur la somme partielle (S_n). C'est notamment assez fréquent avec des séries alternées, puisqu'on parvient dans ce cas à encadrer la somme S entre S_0 et S_1. L'hypothèse de domination est donc assez facile à obtenir.

Exemple 11.1.18

Justifier l'intégrabilité, et exprimer sous forme d'une somme la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{\sqrt{n}\cdot t}\ \mathrm{d}t$

Remarque 11.1.19

Le caractère alterné permet aussi l'étude facile de la CVU, donc de la continuité sur les compacts, ce qui nous assure la continuité par morceaux (au moins sur l'intervalle $\mathring{I}$, ce qui est suffisant).

Méthode 11.1.20 – Récupérer les bornes par CVU

Si on ne peut faire qu'une interversion partielle (par CVU ou par TITT), on peut faire tendre une borne vers la borne voulue en étudiant la convergence uniforme de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t$, pour pouvoir utiliser le théorème de la double limite.

Exemple 11.1.21

En considérant $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

II Limite et continuité d'intégrales à paramètre dans un e.v.n.

Le point de départ de l'étude des intégrales à paramètres est la version continue du TCD. Elle est donnée dans le programme sous la forme suivante.

Théorème 11.2.1 – Théorème de convergence dominée, version continue réelle

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ une famille de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathbb{K}^I$ et $a \in \overline{J}$. On suppose que :

(i) pour tout $\lambda \in J$, f_λ est c.p.m. ;

(ii) pour tout $t \in I$, $f_\lambda(t) \underset{\lambda\to a}{\longrightarrow} f(t)$, et f est c.p.m. ;

(iii) il existe φ telle que pour tout $\lambda \in J$, $|f_\lambda| \leqslant \varphi$, et φ est intégrable.

Alors
$$\lim_{\lambda\to a}\int_I f_\lambda(t)\ \mathrm{d}t = \int_I f(t)\ \mathrm{d}t = \int_I \lim_{\lambda\to a} f_\lambda(t)\ \mathrm{d}t.$$

◁ **Éléments de preuve.**

On montre directement la version plus générale ci-dessous. ▷

Une version un peu plus générale, pas explicitement au programme (mais pouvant se déduire du théorème de continuité qui suit, après prolongement de chaque $f(x,\cdot)$), et exprimée, comme on le fait souvent, en notation fonctionnelle plutôt que familiale, permet de considérer un paramètre dans un e.v.n..
Dans cet énoncé, f étant une fonction définie sur un produit cartésien $A \times I$, $f(\cdot,t)$ désigne la fonction $x \mapsto f(x,t)$ définie sur A, obtenue en fixant la deuxième variable égale à t. De même $f(x,\cdot)$ désigne la fonction d'une variable obtenue en faixant la première variable égale à x.

Théorème 11.2.2 – Théorème de convergence dominée, version continue vectorielle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un e.v.n. de dimension finie, et A une partie de E. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$, $a \in \overline{A}$, et $g : I \to \mathbb{K}$. On suppose que :

(i) pour tout $x \in A$, $f(x,\cdot)$ est c.p.m. ;

(ii) pour tout $t \in I$, $f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} g(t)$, et g est c.p.m. ;

(iii) (domination) il existe φ telle que pour tout $x \in A$, $|f(x,\cdot)| \leqslant \varphi$, et φ est intégrable.

Alors
$$\lim_{x\to a}\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t = \int_I g(t)\ \mathrm{d}t = \int_I \lim_{x\to a} f(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Par critère séquentiel, on se ramène au TCD discret. ▷

Exemple 11.2.3

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x+\ln(t)}{1+x^2t^{\frac{3}{2}}}\ \mathrm{d}t.$

En considérant $a \in I$, on obtient une propriété de continuité

Théorème 11.2.4 – Continuité ponctuelle d'une intégrale à paramètre dans un e.v.n.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un e.v.n. de dimension finie, et A une partie de E. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ et $a \in A$. On suppose que :

(i) pour tout $x \in A$, $f(x,\cdot)$ est c.p.m. ;

(ii) pour tout $t \in I$, $f(\cdot,t)$ est continue en a ;

(iii) (domination) il existe φ telle que pour tout $x \in A$, $|f(x,\cdot)| \leqslant \varphi$, et φ est intégrable.

Alors la fonction
$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t$$
est continue en a.

◁ **Éléments de preuve.**
C'est l'application directe du TCD, dans sa version continue vectorielle, en un point du domaine. ▷

On en déduit de façon immédiate :

Théorème 11.2.5 – Continuité globale d'une intégrale à paramètre dans un e.v.n.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E un e.v.n. de dimension finie, et A une partie de E. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$. On suppose que :

(i) pour tout $x \in a$, $f(x,\cdot)$ est c.p.m. ;

(ii) pour tout $t \in I$, $f(\cdot,t)$ est continue en a ;

(iii) (domination) il existe φ telle que pour tout $x \in A$, $|f(x,\cdot)| \leqslant \varphi$, et φ est intégrable.

Alors la fonction
$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t$$
est continue sur A.

Exemple 11.2.6

1. Étudier la continuité de $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ et déterminer sa limite en $+\infty$.
2. Transformée de Laplace :
   Soit f une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$. Soit $A = \{p \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(p) \geqslant 0\}$.
   Étudier l'existence et la continuité sur A de la transformée de Laplace $F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{pt}\ \mathrm{d}t$.

Remarque 11.2.7

En pratique, il est fréquent de ne pas vérifier l'hypothèse de domination sur A tout entier, mais de le faire sur une famille $(B_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de A tel que tout point de A soit dans l'intérieur d'un des B_i. Par exemple, si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut se contenter de faire la domination sur tous les segments.

Exemple 11.2.8

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

III Dérivation d'intégrales à paramètre réel

Dans cette section, afin de pouvoir dériver, on considère le cas où le paramètre est réel, de sorte à obtenir après intégration une application d'une variable réelle.

Théorème 11.3.1 – Dérivation d'une intégrale à paramètre réel

Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une application telle que :

(i) pour tout $t \in I$, $f(\cdot,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

(ii) pour tout $x \in A$, $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I ;

(iii) pour tout $x \in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ est c.p.m. sur I ;

(iv) (domination de la dérivée) il existe φ intégrable sur I telle que

$$\forall x \in A, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)\right| \leqslant \varphi.$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, et :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Former le taux d'accroissement. L'IAF et les hypothèses permettent l'utilisation du TCD continu. ▷

Exemple 11.3.2

Soit $F : x \mapsto \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t\right)^2$. Exprimer la dérivée de F sous forme de la dérivée d'une intégrale à paramètres, et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

Par symétrisation par parité, on vient de démontrer le résultat classique suivant :

Proposition 11.3.3 – Intégrale de Gauss, HP classique

$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Par récurrence à partir du théorème de dérivation, on obtient :

Théorème 11.3.4 – Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre réel

Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une application telle que :

(i) pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;

(ii) pour tout $x \in A$ et tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ est intégrable sur I ;

(iii) pour tout $x \in A$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)$ est c.p.m. sur I ;

(iv) (domination de la dérivée k-ième) il existe φ intégrable sur I telle que

$$\forall x \in A, \quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot)\right| \leqslant \varphi.$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A, et

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \forall x \in A, \quad g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Exemple 11.3.5

Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale.

IV La fonction Γ (HP mais classique)

Nous faisons dans ce paragraphe un rapide bilan des propriétés importantes de la fonction Γ d'Euler, pour la plupart déjà vues en exemple ou en exercice.

Définition 11.4.1 – Fonction Γ, Euler

La fonction Γ est définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$ telle que l'intégrale converge, par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Proposition 11.4.2 – Domaine de définition

La fonction Γ est définie sur $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Proposition 11.4.3 – Identité remarquable

Pour tout $z \in P$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Proposition 11.4.4 – Valeurs remarquables

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

◁ **Éléments de preuve.**

Pour le 2, se ramener à l'intégrale de Gauss par changement de variable. ▷

Proposition 11.4.5 – Continuité sur P

La fonction Γ est continue sur P.

Proposition 11.4.6 – Régularité sur $\mathbb{R}_+^*$

La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Proposition 11.4.7 – Convexité et variations

Γ est convexe, décroissante sur $]0,1]$ puis croissante sur $[1,+\infty[$.

◁ **Éléments de preuve.**

C'est immédiat pour les dérivées d'ordre pair. Constater ensuite par un argument direct que les dérivées d'ordre pair sont croissantes, donc admettent une dérivée positive. ▷

En particulier, cela implique la croissance et la convexité de Γ et de toutes ses dérivées.

Proposition 11.4.8 – Comportement asymptotique

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \Gamma(x) = +\infty$

(ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$

(iii) $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

$\triangleleft$ **Éléments de preuve.**

La dernière propriété entraînant la première, on peut la montrer d'abord, avec l'identité remarquable. La deuxième s'obtient par croissance et les valeurs particulières déjà trouvées. $\triangleright$

La fonction Γ possède bien d'autres propriétés, et est d'une grande importance, notamment car elle intervient dans le calcul de nombreuses transformées de Laplace. Nous aurons peut-être l'occasion de prolonger notre étude de Γ en DM.