12 Endomorphismes d'un espace euclidien

Le but de ce chapitre est d'étudier certains types d'endomorphismes d'un espace euclidien. On s'intéresse en particulier aux isométries vectorielles (les endomorphismes conservant les distances) et aux endomorphismes autoadjoint, dont la matrice dans une base orthonormale est symétrique.
On montrera notamment que, dans une base orthonormale bien choisie, les isométries f ont une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant de taille 1 ou 2, et correspondant à une direction stable sur laquelle f agit comme une symétrie ou l'identité (pour les blocs de taille 1), ou a un plan stable sur lequel f agit comme une rotation.
On montrera également que les endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) sont diagonalisables en base orthonormale, ce qui se réexprime en disant que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable. C'est le théorème spectral. Enfin, nous caractériserons, pour un endomorphisme autoadjoint a, la positivité de la forme quadratique $x \mapsto \langle x, a(x) \rangle$ (ou matriciellement $X \mapsto X^\top AX$) par la positivité du spectre. Cette propriété sera utile en particulier pour l'étude des points critiques des fonctions de plusieurs variables, en vue de faire de l'optimisation (recherche d'extrema).

I Rappels sur les espaces euclidiens

Ce survol rapide des définitions et propriétés essentielles du cours de première année ne remplace pas une révision complète et en profondeur de votre cours de première année. Il n'a pas vocation à être complet, et ne fait que réintroduire rapidement les notions que nous aurons à utiliser par la suite.

I.1 Formes bilinéaires et produit scalaire

Définition 12.1.1 – Forme bilinéaire

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une forme bilinéaire φ sur E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$, linéaire par rapport à chaque facteur, l'autre étant fixé, c'est-à-dire :

(i) $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x,z) + \varphi(y,z)$

(ii) $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x, \lambda y + z) = \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,z)$.

On rappelle la propriété de bilinéarité généralisée

Lemme 12.1.2 – Bilinéarité généralisée

Soit φ une forme bilinéaire sur E. Soit $(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$, et soit $(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_\ell) \in E^{k+\ell}$, et

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_\ell) \in \mathbb{K}^{k+\ell}$. Alors

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_i \mu_j \varphi(x_i, y_j).$$

Définition 12.1.3 – Matrice associée à une forme bilinéaire

Soit φ une forme bilinéaire sur E de dimension finie, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors on définit la matrice de φ relativement à la base $\mathcal{B}$ par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Théorème 12.1.4 – Caractérisation de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ par la relation $\varphi(x, y) = X^\top MY$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice M est la matrice de φ relativement à la base $\mathcal{B}$ si et seulement si pour tout $(x, y) \in E^2$, dont les matrices colonnes coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont X et Y,

$$\varphi(x, y) = X^\top MY.$$

Proposition 12.1.5 – Formule de changement de base

Soit E un espace vectoriel de dimension finien et φ une forme bilinéaire. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E, et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi) = P^\top \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) P.$$

Définition 12.1.6 – Produit scalaire

Un produit scalaire φ sur E est une forme bilinéaire telle que :

(i) (positivité) : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$

(ii) (caractère défini) : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$

(iii) (Symétrie) : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

On note souvant $\langle x, y\rangle$ ou $(x|y)$.

L'expression matricielle d'une forme bilinéaire s'applique aussi aux produits scalaires, et donc, en notant M la matrice du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans une base $\mathcal{B}$ et X et Y les vecteurs-colonne coordonnées de x et y, le produit scalaire s'exprime :

$$\langle x, y\rangle = X^\top MY.$$

Proposition 12.1.7 – Matrice d'un produit scalaire

La matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque est symétrique et inversible. La réciproque est fausse.

Définition 12.1.8 – Espace préhilbertien réel

Un espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le produit scalaire, on parlera plus simplement de l'espace préhilbertien E, au lieu de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Définition 12.1.9 – Espace euclidien

Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

I.2 Orthogonalité

On suppose que E est un espace euclidien. La plupart des notions se généralise au cas préhilbertien réel, mais certains propriétés peuvent être fausses en revanche.
On rappelle que deux vecteurs x et y sont orthogonaux si, par définition, $\langle x, y\rangle = 0$.

Définition 12.1.10 – Famille orthogonale, orthonormale

1. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale si pour tout $i \neq j$ de I, $x_i \perp x_j$.
2. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est orthonormale (ou orthonormée) si et seulement si elle est orthogonale, et que pour tout $i \in I$, $\|x_i\| = 1$.

Une propriété important de ces familles est leur liberté :

Proposition 12.1.11 – Liberté des familles orthogonales

1. Une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.
2. Une famille orthonormale est libre.

Le procédé de Gram-Schmidt permet, à partir d'une famille libre $(e_1, \dots, e_n)$, de construire une famille orthonormale $(f_1, \dots, f_n)$ telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k), \qquad \text{et} \qquad \langle e_k, f_k\rangle = 1.$$

En particulier, en partant d'une base d'un espace euclidien, on en déduit :

Théorème 12.1.12 – Existence d'une base orthonormale

Soit E un espace euclidien. Alors E admet une b.o.n.

Plus précisément, en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à une base obtenue en complétant une famille orthonormale :

Théorème 12.1.13 – Théorème de la base orthonormale incomplète

Soit E un espace euclidien. Alors toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

Définition 12.1.14 – Sous-espaces orthogonaux

Les sous-espaces F et G de E sont orthogonaux si pour tout $(x, y) \in F \times G$, $x \perp y$.

Proposition 12.1.15 – Orthogonalité et somme directe

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces de E, 2 à 2 orthogonaux. Alors la somme $\bigoplus\limits_{i\in I} F_i$ est directe.

Proposition/Définition 12.1.16 – Supplémentaire orthogonal

Soit E un espace euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble $F^\perp = \{y \in E,\ y \perp F\}$ est un supplémentaire de E, orthogonal à F. Il est appelé supplémentaire orthogonal de F.

Avertissement 12.1.17

C'est faux si E n'est pas de dimension finie (cadre préhilbertien réel au lieu d'euclidien).

I.3 Projection orthogonale

Définition 12.1.18 – Projeté orthogonal sur un sev

Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $y \in E$. On dit que $z \in E$ est le projeté orthogonal de y sur F si et seulement si :

(i) $z \in F$

(ii) $(y - z) \perp F$.

Théorème 12.1.19 – Existence du projeté orthogonal sur un sev de dimension finie

Soit $y \in E$, et F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E, et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ une b.o.n. de F. Alors le projeté orthogonal de y sur F existe, est unique, et vaut :

$$z = \sum_{i=1}^{m} \langle y, b_i \rangle b_i.$$

Proposition 12.1.20 – Description de la projection orthogonale

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace de E. L'application p qui à x associe son projeté orthogonal sur F est un projecteur de E. Plus précisément, c'est le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

I.4 Coordonnées en base orthonormale

Théorème 12.1.21 – Coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n. et norme

Soit E un espace euclidien, et $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une b.o.n. de E. Soit $x, y \in E$. Alors :

(i) $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i \rangle b_i$, c'est-à-dire $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle x, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, b_n \rangle \end{pmatrix}$.

(ii) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i \rangle \langle y, b_i \rangle$

(iii) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i \rangle^2$

Ainsi, si $\mathcal{B}$ est une b.o.n. et si

$$X = [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = [y]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

sont les coordonnées de x et y dans la b.o.n. $\mathcal{B}$, le produit scalaire et la norme s'expriment par les formules usuelles :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^{\top} Y \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^{\top} X.$$

Ces relations traduisent le fait que la matrice du produit scalaire dans une base orthonormale pour ce produit scalaire est égale à I_n.

Théorème 12.1.22 – Matrice d'un endomorphisme relativement à une b.o.n.

Soit E un espace euclidien muni d'une b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (\langle b_i, u(b_j)\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} \langle b_1, u(b_1)\rangle & \cdots & \langle b_1, u(b_n)\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle b_n, u(b_1)\rangle & \cdots & \langle b_n, u(b_n)\rangle \end{pmatrix}.$$

I.5 Changements de base orthonormales, matrices orthogonales

Théorème 12.1.23 – propriété des matrices de passage d'une b.o.n. à une autre

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. Soit $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Alors :

$$P^\top P = I_n = PP^\top, \qquad \text{donc:} \qquad P^{-1} = P^\top.$$

◁ **Éléments de preuve.**
Utiliser la formule de changement de base pour la matrice du ps dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. On peut aussi le retrouver à l'aide de la desciption explicite de $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ et des expressions des $\langle c_i, c_j\rangle$ en b.o.n. $\mathcal{B}$. ▷

Définition 12.1.24 – Matrice orthogonale

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n. On dit que P est une matrice orthogonale si et seulement si $P^\top P = I_n$.

Exemples 12.1.25

1. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$
2. La matrice I_n, la matrice $-I_n$, et plus généralement, toute matrice obtenue de I_n en changeant les signes de certains de ses coefficients diagonaux, et en permutant les colonnes.

De la définition même découle de façon immédiate :

Proposition 12.1.26 – Inverse d'une matrice orthogonale

Soit P une matrice orthogonale. Alors P est inversible, et $P^{-1} = P^\top$.

Une matrice orthogonale peut se caractériser également par l'orthonormalité de ses colonnes ou ses lignes :

Théorème 12.1.27 – Caractérisation d'une matrice orthogonale par ses colonnes ou lignes

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) P est orthogonale

(ii) $P^\top$ est orthogonale

(iii) Les colonnes de P forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

(iv) Les lignes de P forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Théorème 12.1.28 – Caractérisation des matrices de passage entre b.o.n. par orthogonalité

Soit E un espace euclidien.

1. Toute matrice de passage d'une b.o.n. de E à une autre b.o.n. de E est une matrice orthogonale.
2. Réciproquement, soit $\mathcal{B}$ une b.o.n. de E, et P une matrice orthogonale. Alors il existe une

unique base $\mathcal{C}$ telle que P soit la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, et cette base $\mathcal{C}$ est une b.o.n. de E.

3. De même, si $\mathcal{C}$ est une b.o.n. de E, et P une martice orthogonale, il existe une unique base $\mathcal{B}$ telle que P soit la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, et cette base $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de E.

◁ **Éléments de preuve.**

1. Résulte de la définition.
2. Remarquer que si x et y sont deux vecteurs de coordonnées X et Y dans une b.o.n, et si φ est le psc, $\langle x, y\rangle = \varphi(X, Y)$. Justifier que ceci permet de définir une b.o.n. dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont les colonnes de P.
3. Appliquer ce qui précède à P^{-1} qui est encore orthogonal.

▷

Définition 12.1.29 – Groupe orthogonal

On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ou $\mathrm{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cet ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est appelé groupe orthogonal.

Théorème 12.1.30 – Structure de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$

L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, ce qui est cohérent avec la terminologie introduite dans la définition précédente.

◁ **Éléments de preuve.**
Montrer que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; les vérifications sont simples. ▷

Théorème 12.1.31 – Déterminant d'une matrice orthogonale

Soit $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(P) \in \{-1, 1\}$. Plus précisément, det est un morphisme de groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$.

◁ **Éléments de preuve.**
Appliquer le det à l'égalité $P^\top P = I_n$. ▷

Le noyau de ce morphisme est donc un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Définition 12.1.32 – Groupe spécial orthogonal

Le noyau du déterminant défini sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est appelé groupe spécial orthogonal, et noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n)$. Ainsi, les éléments de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices orthogonales P telles que $\det(P) = 1$.

Remarque 12.1.33

Si $n \in \mathbb{N}^*$, le sous-groupe $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ n'est pas égal à $\mathrm{O}(n)$ tout entier. En effet, la matrice $\mathrm{Diag}(-1, 1, \cdots, 1)$ est dans $\mathrm{O}(n) \backslash \mathrm{SO}(n)$.
Plus précisément, on peut alors montrer qu'il y a « autant » d'éléments dans $\mathrm{SO}(n)$ que dans $\mathrm{O}(n) \backslash \mathrm{SO}(n)$.

Proposition 12.1.34 – Bijection entre $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n)$

Soit $P \in \mathrm{O}(n) \backslash \mathrm{SO}(n)$. L'application

$$Q \mapsto PQ$$

est une bijection de $\mathrm{SO}(n)$ dans $\mathrm{O}(n) \backslash \mathrm{SO}(n)$.

Définition 12.1.35 – Matrices orthogonales directes, indirectes

Soit $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On dit que :

- P est une matrice orthogonale positive (ou directe) si $P \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$;
- P est une matrice orthogonale négative (ou indirecte) si $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \backslash \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Terminologie 12.1.36 – Matrices orthogonalement semblables

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On dit que A et B sont orthogonalement semblables s'il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ telle que $B = P^{-1}AP = P^\top AP$.
2. On dit que A est orthogonalement diagonalisable si A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.
3. On dit que A est orthogonalement trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

I.6 Orientation d'un espace

Proposition/Définition 12.1.37 – Orientation d'un espace

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. La relation $\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{B}' \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E
2. Cette relation d'équivalence possède exactement deux classes d'équivalence
3. On dira que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation si elles appartiennent à la même classe d'équivalence.
4. Une orientation de E est alors le choix arbitraire d'une de ces deux classes d'équivalence, qu'on fait généralement en se donnant une base de référence $\mathcal{B}_0$.
5. Ainsi, étant donné une base de référence $\mathcal{B}_0$, une base $\mathcal{B}$ est directe si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$, et indirecte si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$.

Ainsi, orienter l'espace E consiste à choisir une base de référence $\mathcal{B}_0$. Toute base de la même orientation que $\mathcal{B}_0$ sera alors appelée base directe.

Proposition 12.1.38 – Caractérisation de l'orientation pour les b.o.n.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux b.o.n. d'un espace euclidien E. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation ;

(ii) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in SO(n)$

(iii) $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$

(iv) $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

Définition 12.1.39 – Produit mixte dans un espace euclidien orienté

Soit E un espace euclidien orienté, et $\mathcal{B}$ une b.o.n. directe. Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. Le produit mixte de $(u_1, \ldots, u_n)$ est défini par :

$$[u_1, \ldots, u_n] = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n).$$

Cette définition est indépendante du choix de la b.o.n. directe $\mathcal{B}$.

II Endomorphismes autoadjoints

II.1 Adjoint d'un endomorphisme

Théorème 12.2.1 – Théorème de représentation de Riesz

Soit E un espace euclidien, et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire sur E. Il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que $\varphi = \langle a, \cdot \rangle$.
Plus précisément, $a \mapsto \varphi_a = \langle a, \cdot \rangle$ est un isomorphisme de E dans E^*.

Proposition/Définition 12.2.2 – Adjoint d'un endomorphisme

Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Pour tout $x \in E$:
   - l'application $y \mapsto \langle x, u(y) \rangle$ est une forme linéaire ;
   - il existe un unique vecteur $u^*(x) \in E$ tel que pour tout $y \in E$, $\langle x, u(y) \rangle = \langle u^*(x), y \rangle$.
2. L'application $u^* : x \mapsto u^*(x)$ est un endomorphisme de E.
3. L'endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ est appelé adjoint de l'endomorphisme u.

◁ **Éléments de preuve.**
Le premier point est une vérification élémentaire. Le second provient du théorème de représentation de Riesz.
Le fait que u^* soit un endomorphisme provient de l'unicité dans le théorème de représentation de Riesz, en constatant que $\lambda u^*(x) + u^*(x')$ répond au problème de la représentation de la forme linéaire $\langle \lambda x + x', \cdot \rangle$. ▷

Proposition 12.2.3 – Adjoint d'une composée

Soit E un espace euclidien, et u et v deux endomorphismes de E. Alors

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*.$$

◁ **Éléments de preuve.**
Vérifier que $\langle u^* \circ v^*(x), y \rangle = \langle x, v \circ u \rangle$, égalité qui caractérise l'adjoint $(v \circ u)^*$. ▷

Proposition 12.2.4 – Double-adjoint

L'application $u \mapsto u^*$ de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même est involutif. En d'autres termes, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$(u^*)^* = u.$$

◁ **Éléments de preuve.**
Simplifier $\langle (u^*)^*(x), y \rangle$. La symétrie du produit scalaire pourra être utile pour se ramener de façon précise à la définition. ▷

Proposition 12.2.5 – Stabilité par u^* de l'orthogonal d'un sous-espace stable

Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sous-espace de E. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) F est stable par u

(ii) $F^\perp$ est stable par u^*.

◁ **Éléments de preuve.**

Sens direct : calculer $\langle u^*(x), y\rangle$ pour $x \in F^\perp$ et $y \in F$.

Sens réciproque : cela se ramène au sens direct, par involutivité du passage à l'adjoint et du passage au supplémentaire orthogonal. ▷

Proposition 12.2.6 – Relations entre images et noyaux, HP

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^\perp \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp.$$

◁ **Éléments de preuve.**

La première égalité provient de l'équivalence $x \in \mathrm{Ker}(u^*)$ ssi $\forall y \in E$, $\langle u^*(x), y\rangle = 0$, puis utiliser la définition de l'adjoint.

La seconde égalité se ramène à la première en remplaçant u par u^*. ▷

Corollaire 12.2.7 – Rang d'un adjoint

Soit E un espace euclidien, et u un endomorphisme de E. Alors

$$\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u).$$

Une interprétation matricielle permet de relier ce résultat à un résultat déjà connu, démontré de façon algorithmique.

Proposition 12.2.8 – Représentation matricielle d'un adjoint

Soit E un espace euclidien, muni d'une base orthonormale $\mathcal{B}$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^\top.$$

◁ **Éléments de preuve.**

Les formes bilinéaires $(x, y) \mapsto \langle u^*(x), y\rangle$ et $(x, y) \mapsto \langle x, u(y)\rangle$ ont des matrices dans $\mathcal{B}$ respectivement associées à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*)^\top$ et à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, et sont égales. ▷

L'égalité des rangs de u et u^* provient alors de l'invariance du rang par transposition. Ce résultat est plus général que celui qu'on a prouvé ci-dessus (car valide pour des matrices de tout format), mais la démonstration ci-dessus donne un éclairage géométrique à un résultat qui sinon reste purement algorithmique. D'ailleurs, on pourrait adapter cette démonstration à la situation générale, en considérant des applications linéaires entre 2 espaces euclidiens E et F.

Le déterminant, la trace, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique sont aussi invariants par transposition. On obtient donc :

Proposition 12.2.9 – Rang, trace, déterminant, spectre d'un adjoint

Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

1. $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$
2. $\mathrm{tr}(u^*) = \mathrm{tr}(u)$
3. $\det(u^*) = \det(u)$
4. $\mu_{u^*} = \mu_u$
5. $\chi_{u^*} = \chi_u$

6. $\mathrm{Sp}(u^*) = \mathrm{Sp}(u)$, avec égalité des multiplicités (algébriques).

II.2 Endomorphismes autoadjoints

Une situation particulière importante est le cas des endomorphismes égaux à leur adjoint.

Définition 12.2.10 – Endomorphisme autoadjoint

Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est un endomorphisme autoadjoint (ou endomorphisme symétrique) si $u = u^*$
On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des automorphismes auto-adjoints de E.

Remarque 12.2.11

La notation utilisée se réfère à la terminologie « endomorphisme syémtrique », qui s'explique par l'aspect matriciel évoqué ci-dessous. Mais le programmme officiel stipule explicitement de privilégier la terminologie « endomorphisme autoadjoint ».

La propriété de stabilité des supplémentaires orthogonaux se réexprime dans ce contexte de la façon suivante :

Proposition 12.2.12 – Orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme autoadjoint

Soit E un espace euclidien, et u en endomorphisme autoadjoint de E. Soit F un sous-espace de E. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) F est stable par u

(ii) $F^\perp$ est stable par u.

De plus, si cette propriété est vérifiée, les endomorphismes induits u_F et $u_{F^\perp}$ sont eux-même autoadjoints.

Proposition 12.2.13 – Caractérisation des endomorphismes auto-adjoints

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) u est un endomorphisme autoadjoint ;

(ii) $\forall (x, y) \in E^2,\quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$;

(iii) pour tout b.o.n. $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$;

(iv) il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

◁ **Éléments de preuve.**

- $(i) \iff (ii)$ par définition
- $(i) \implies (iii)$ par description matricielle de l'adjoint.
- $(iii) \implies (iv)$ par existence d'une b.o.n.
- $(iv) \implies (i)$ aussi par description matricielle de l'adjoint.

▷

Ainsi, les endormophismes autoadjoints sont exactement les endomorphismes dont la matrice est symétrique (réelle) en base orthonormale.
Vous avez peut-être déjà remarqué au cours d'exercices que lorsque vous exprimez la matrice d'un projecteur orthogonal en base orthonormale, vous obtenez une matrice symétrique. Cela n'est pas un hasard, et résulte de la proposition suivante.

Proposition 12.2.14 – Caractérisation des projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs

Soit E un espace euclidien, et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de E. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) p est un projecteur orthogonal

(ii) p est un endomorphisme autoadjoint (et un projecteur par hypothèse)

II.3 Théorème spectral

Dans cette section, nous nous intéressons à la réduction des endomorphismes autoadjoints. Le théorème principal est la diagonalisabilité des endomorphismes autoadjoints, en base orthonormale.
Dans tout ce paragraphe, E est un espace euclidien. Le corps de base est donc $\mathbb{R}$, et le spectre est donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Même lors des traductions matricielles, le spectre sera toujours considéré dans $\mathbb{R}$.
Le point clé permettant la diagonalisation des endomorphismes autoadjoints est l'existence d'au moins une valeur propre réelle d'une matrice symétrique réelle.

Lemme 12.2.15 – Spectre d'une matrice symétrique réelle

Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Sp}(M) \neq \varnothing$.

◁ **Éléments de preuve.**

Considérer (exceptionnellement) une valeur propre complexe λ (pourquoi en existe-t-il une ?) et un vecteur propre complexe X associé. Considérer $\overline{X}^\top MX = \lambda \overline{X}^\top X$, transposer et conjuguer, pour conclure que $\lambda = \overline{\lambda}$. Qu'en déduire sur les racines du polynôme caractéristique de M ?

C'est la seule incursion dans les complexes, désormais, on travaille exclusivement dans $\mathbb{R}$. ▷

Corollaire 12.2.16 – Spectre d'un endomorphisme autoadjoint

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors $\mathrm{Sp}(u) \neq \varnothing$.

Théorème 12.2.17 – Théorème spectral

Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $u \in \mathcal{S}(E)$

(ii) $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u)$

(iii) u est diagonalisable en b.o.n.

(iv) il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in D_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 12.2.18 – Diagonalisabilité des matrices symétriques réelles

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

(ii) M est orthogonalement semblable à une matrice orthogonale.

Avertissement 12.2.19

Une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas nécessairement diagonalisable !

II.4 Endomorphismes autoadjoints positifs

Au voisinage d'un point critique, une application de classe $\mathcal{C}^2$ sue un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ pourra être approchée localement au second ordre par une application $f(X_0) + H^T SH$, où $H = X - X_0$ et S est une matrice symétrique, appelée matrice hessienne de f. On s'intéressera alors au signe de $H^\top SH$, afin de déterminer si la fonction présente en X_0 un extremum local ou non. Cette expression s'apparente à une expression du type $\langle x, u(x)\rangle$, où u est un endomorphisme autoadjoint. Pour cette raison, l'étude du signe de telles expressions revêt une grande importance.

Définition 12.2.20 – Endomorphismes autoadjoints (définis) positifs

Soit E un espace euclidien, et $u \in \mathcal{S}(E)$.

1. On dit que u est un endomorphisme autoadjoint positif si $\forall x \in E,\ \langle x, u(x)\rangle \geqslant 0$.
   On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des automorphismes autoadjoints positifs.
2. On dit que u est un endomorphsime autoadjoint défini positif si $\forall x \in E\backslash\{0\}, \langle x, u(x)\rangle > 0$.
   On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des automorphismes autoadjoints définis positifs.

Proposition 12.2.21 – Caract. spectrale des endomorphismes autoadjoints positifs

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) u est autoadjoint positif

(ii) $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$

Proposition 12.2.22 – Caract. spectrale des endomorphismes autoadjoints définis positifs

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) u est autoadjoint défini positif

(ii) $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$

Ces définitions et propriétés se traduisent bien matriciellement.

Définition 12.2.23 – Matrices symétriques (définies) positifs

$M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. On dit que M est une matrice syémtrique positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ X^\top MX \geqslant 0$.
   On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives. M est une matrice syémtrique positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\},\ \ X^\top MX > 0$.
   On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Proposition 12.2.24 – Caract. spectrale des matrices syémtriques positives

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) M est symétrique positive

(ii) $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$

Proposition 12.2.25 – Caract. spectrale des matrices syémtriques définies positives

Soit $u \in \mathcal{S}_n(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) M est symétrique définie positive

(ii) $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$

Exemples 12.2.26

1. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M^\top$ est symétrique positive. Elle est définie positive ssi $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Une matrice M est symétrique définie positive ssi c'est la matrice d'un produit scalaire relativement à une base $\mathcal{B}$ arbitraire.
3. Une matrice M est symétrique définie positive si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = P^\top P$.
4. Les matrices suivantes sont-elles positives, définies positives ?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}.$$

III Isométries vectorielles

III.1 Définitions

Définition 12.3.1 – Isométrie vectorielle

- Soit E un espace euclidien. Une isométrie vectorielle est un endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ conservant la norme, c'est-à-dire tel que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

  Une isométrie vectorielle est parfois aussi appelée endomorphisme orthogonal.
- On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Proposition 12.3.2 – Structure de $\mathrm{O}(n)$; groupe orthogonal

$(\mathrm{O}(n), \circ)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Il est appelé groupe orthogonal de E

◁ **Éléments de preuve.**

- La conservation de la norme et la séparation des normes permet de décrire facilement $\mathrm{Ker}(u)$, pour $u \in \mathrm{O}(n)$. Un argument de dimension montre alors l'inclusion dans $\mathrm{GL}(E)$.
- La structure de sous-groupe se vérifie facilement ensuite.

▷

Exemples 12.3.3

Les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ (muni du ps usuel) canoniquement associés à $R(\theta)$ et $S(\theta)$ sont des isométries. Pouvez-vous les décrire géométriquement en analysant l'image de la base canonique ?

L'exemple de $S(\theta)$ se généralise facilement à tout espace

Définition 12.3.4 – Symétries orthogonales, réflexions

Soit E un espace euclidien, et $s \in \mathcal{L}(E)$.

- s est une symétrie orthogonale ssi il existe un sous-espace F de E tel que s soit la symétrie par rapport à F, parallèlement à $F^\perp$.
- s est une réflexion si et seulement si s est une symétrie orthogonal par rapport à un hyperplan P.

Remarque 12.3.5

- Une symétrie orthogonale par rapport à une droite D est appelée symétrie d'axe D.
- Une symétrie orthogonale (mais il n'y a pas trop le choix...) par rapport à $\{0\}$ est appelée symétrie centrale.

Proposition 12.3.6 – Les symétries orthogonales sont des isométries

Yep !

◁ **Éléments de preuve.**

Décomposer $x = x_F + x_{F^\perp}$, exprimer $s(x)$ à l'aide de cette décomposition, et comparer $\|x\|$ et $\|s(x)\|$ grâce au théorème de Pythagore. ▷

Proposition 12.3.7 – Caractérisations des isométries

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $u \in \mathrm{O}(n)$

(ii) $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
(caractérisation par conservation du produit scalaire)

(iii) pour toute b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, la famille $u(\mathcal{B}) = (u(b_1), \dots, u(b_n))$ est encore une b.o.n.
(caractérisation par l'image des bases orthonormales) ;

(iv) il existe une b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ telle que $u(\mathcal{B}) = (u(b_1), \dots, u(b_n))$ soit encore une b.o.n.
(caractérisation par l'image d'une base orthonormale) ;

(v) pour toute b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$;
(caractérisation par sa matrice dans toute base orthonormale)

(vi) il existe une b.o.n. $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$;
(caractérisation par sa matrice dans une base orthonormale)

(vii) $u^* = u^{-1}$
(caractérisation par l'adjoint)

◁ **Éléments de preuve.**

- $(i) \Longrightarrow (ii)$ en considérant $\|u(x+y)\|$. La réciproque est évidente.
- $(ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (vi) \Longrightarrow (v) \Longrightarrow (vii) \Longrightarrow (ii)$; ce n'est évidemment pas le seul parcours possible.

▷

Remarques 12.3.8

1. En particulier, le point (ii) assure qu'une isométrie conserve l'orthogonalité. Mais la conservation de l'orthogonalité n'est pas suffisante pour caractériser les isométries.
2. Les points (v) et (vi) justifient la terminologie « endomorphisme orthogonal. Le programme mentionne les deux terminologies, mais stipule de privilégier « isométrie vectorielle ».
3. Les points (v) et (vi) justifient également la ressemblance de notation et la correspondance des terminologies utilisées pour désigner le groupe des isométries et le groupe des matrices orthogonales. Plus précisément, $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme entre $\mathrm{O}(E)$ et $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 12.3.9

- Soit s une symétrie orthogonale. Trouver une b.o.n. dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$ est orthogonale. Remarquez que cela propose une alternative à la preuve précédente du caractère isométrique des symétries orthogonales.
- Une symétrie $s \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonale ssi $s^* = s$

Ce dernier point permet de caractériser les symétries qui sont des isométries.

Proposition 12.3.10 – Caractérisation des symétries isométriques

Soit s une symétrie de E. Alors s est une isométrie ssi s est une symétrie orthogonale.

Les points (v) et (vi) donnent accès au déterminant d'une isométrie vectorielle

Proposition 12.3.11 – Isométries directes et indirectes

Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$.

- Si $\det(u) = 1$, on dit que u est une isométrie directe.
- Si $\det(u) = -1$, on dit que u est une isométrie indirecte.

Proposition/Définition 12.3.12 – Groupe spécial orthogonal

On note $\mathrm{SO}(E)$ l'ensemble des isométries indirectes de E
C'est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$, appelé groupe spécial orthogonal.

Remarques 12.3.13

- L'égalité $|\det(u)| = 1$ est assez naturelle, puisque le déterminant calcule l'effet sur les volumes de l'endomorphisme u : $\det(u)$ est le coefficient de proportionnalité entre le volume orienté du parallélotope engendré par $(x_1, \dots, x_n)$ et le volume orienté du parallélotope engendré par $(u(x_1), \dots, u(x_n))$.
  Ainsi, l'égalité $|\det(u)| = 1$ ne fait que traduire le fait qu'un isométrie conserve les configurations spaciales, et donc les volumes.
- Les isométries directes sont celles qui conservent l'orientation des b.o.n., les isométries indirectes sont celles qui inverse l'orientation des b.o.n.

Exemple 12.3.14

- Caractériser les syémtries orthogonales qui sont dans $\mathrm{SO}(E)$.
- Une réflexion est-elle une isométrie directe ?
- À quelle condition sur E une symétrie d'axe D est-elle une isométrie directe ?

III.2 Matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans ce paragraphe, nous donnons la description complète des isométries d'un espace de dimension 2. Au passage, nous définierons la notion d'angle dans un espace euclidien de dimension 2 quelconque, en supposant connue la notion d'angle dans le plan euclidien usuel.
Nous donnons dans cette section une description complète des isométries en dimension 2. Pour cela, nous commençons par déterminer les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 12.3.15 – Matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

(i) Soit $M \in \mathrm{SO}(2)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$;

(ii) Soit $M \in \mathrm{O}(2) \backslash \mathrm{SO}(2)$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$;

Ces descriptions sont uniques modulo 2π.

◁ **Éléments de preuve.**

En notant C_1 et C_2 les colonnes de M, C_1 est de norme 1 et peut donc s'écrire $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$. Le vecteur C_2 doit être orthogonal à C_1 et unitaire aussi. Cela ne laisse que deux possibilités. ▷

On note :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proposition 12.3.16 – produits dans $\mathrm{O}(2)$

Soit θ, θ' dans $\mathbb{R}$.

(i) $R(0) = I_2$

(ii) $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta')R(\theta)$

(iii) $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$.

(iv) $S(\theta)S(\theta') = R(\theta - \theta')$

(v) $S(\theta)R(\theta') = S(\theta - \theta')$

(vi) $R(\theta)S(\theta') = S(\theta + \theta')$.

◁ **Éléments de preuve.**

Calcul direct et peu intéressant, basé sur les formules de trigonométrie ▷

En particulier, on reconnaît en $\mathrm{SO}(2)$ un groupe qu'on a déjà rencontré.

Théorème 12.3.17 – $\mathrm{SO}(2)$ est isomorphe à $\mathbb{U}$

L'application qui à $R(\theta)$ associe $e^{i\theta}$ est un isomorphisme de groupe entre $\mathrm{SO}(2)$ et $\mathbb{U}$.
En particulier, $\mathrm{SO}(2)$ est commutatif.

◁ **Éléments de preuve.**

Montrer qu'on peut passer $\theta \mapsto R(\theta)$ au quotient (de $\mathbb{R}$ par $2\pi\mathbb{Z}$). ▷

III.3 Isométries en dimension 2

De l'étude précédente, et de la caractérisation matricielle des isométries, il découle de façon immédiate que l'on sait décrire explicitement toutes les isométries d'un espace euclidien de dimension 2.

Lemme 12.3.18 – Matrices orthogonalement semblables à $R(\theta)$

La seule matrice orthogonalement semblable à $R(\theta)$ est $R(\theta)$ elle-même.

Définition 12.3.19 – Rotation d'angle θ

Soit E un espace euclidien de dimension 2. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est une rotation d'angle θ s'il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = R(theta)$.
En vertu du lemme précédent, cette définition est indépendante du choix de la b.o.n. $\mathcal{B}$ et on aura, pour toute b.o.n. $\mathcal{C}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = R(\theta)$.
On notera ρ_θ la rotation d'angle θ.

D'après les résultats précédents sur les matrices $R(\theta)$, on obtient $\rho_\theta = \rho_{theta'}$ ssi $\theta \equiv \theta'$ $[2\pi]$.

Théorème 12.3.20 – Classification des isométries en dimension 2

Soit E un espace euclidien de dimension 2.

1. Les éléments de $\mathrm{SO}(2)$ sont exactement les rotations
2. Les éléments de $\mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2)$ sont exactement les réflexions.

◁ **Éléments de preuve.**

Le premier point résulte de la description de $\mathrm{SO}_2(RR)$ et de la définition des rotations.

Pour le second point, une inclusion est déjà acquise. Pour la seconde, constater que $S(\theta)^2 = I_2$, donc les éléments de $\mathrm{O}(2)\backslash\mathrm{SO}(2)$ sont des symétries. Une propriété précédente caractérise les symétries isométriques parmi toutes les symétries. ▷

Les règles de produit matriciel dans $\mathrm{SO}(2)$ amènent directement les règles de composition des rotations, dont l'interprétation géométrique est assez intuitive :

Proposition 12.3.21 – Inverse et composée de deux rotations

(i) $\rho_0 = \mathrm{id}_E$

(ii) Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}$, $\rho_\theta \circ \rho_{\theta'} = \rho_{\theta+\theta'} = \rho_{\theta'} \circ \rho_\theta$

(iii) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\rho_\theta^{-1} = \rho_{-\theta}$.

Nous pouvons définir la notion d'angle orienté entre deux vecteurs grâce aux rotations. Pour cela, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 12.3.22

Soit E un espace euclidien orienté, et soit x et y deux vecteurs de norme 1 de E. Il existe une unique rotation ρ telle que $\rho(x) = y$.

◁ **Éléments de preuve.**

Si on se fixe une orientation, il existe une unique b.o.n. directe $\mathcal{B}$ de premier vecteur x et une unique b.o.n. directe $\mathcal{C}$ de premier vecteur y. La rotation ρ doit nécessairement envoyer $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{C}$. ▷

Définition 12.3.23 – Angle orienté entre deux vecteurs

Soit E un espace vectoriel orienté, et x et y deux vecteurs non nuls de E. Alors l'angle orienté $\widehat{(x, y)}$ est l'angle θ, défini modulo 2π, de l'unique rotation ρ telle que

$$\rho\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{y}{\|y\|}.$$

Proposition 12.3.24 – Réflexion de matrice $S(\theta)$

Soit E un espace euclidien de dimension 2, $s \in \mathrm{O}(E)\backslash\mathrm{SO}(E)$, et $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ une b.o.n. de E. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = S(\theta)$.
Alors, s est la réflexion par rapport à la droite dirigée par un vecteur unitaire u tel que $\widehat{(b_1, u)} = \frac{\theta}{2}$.

◁ **Éléments de preuve.**

Faire un changement de base pour exprimer s dans l'unique base (u, v) telle que (u, v) soit orthonormale de même orientation que $\mathcal{B}$. Que peut-on dire de la matrice de passage ?

▷

III.4 Réduction des isométries

On cherche maintenant à décrire toutes les isométries de E. On montre plus précisément qu'un endomorphisme est une isométrie si et seulement s'il existe une b.o.n. dans laquelle sa matrice est diagonale par bloc, chaque bloc étant de la forme 1, -1, $R(\theta)$.
Dans cette section, E désigne un espace euclidien.

Lemme 12.3.25 – Stabilité des orthogonaux

Soit u une isométrie, et F un sous-espace stable par u. Alors $F^\perp$ est aussi stable par u.

◁ **Éléments de preuve.**
Passer par u^*, et le fait que u^{-1} est un isomorphisme. ▷

Lemme 12.3.26 – Existence d'un sous-espace strict stable

Soit E de dimension au moins 3, et soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Il existe F un sous-espace de E, distinct de $\{0\}$ et de E, tel que F soit stable par u.

◁ **Éléments de preuve.**
Considérer un facteur irréductible P de χ_u, de degré d, et un vecteur $x \in \mathrm{Ker}(P(u))$. Justifier que $\mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ est stable par u. ▷

Théorème 12.3.27 – Réduction des isométries

Soit u un isométrie. Il existe une b.o.n. $\mathcal{B}$, des entiers naturels p, q et k, et des réels $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale par blocs de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -I_q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & R(\theta_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & R(\theta_k) \end{pmatrix}$$

Réciproquement, tout endomorphisme se réduisant ainsi en base orthonormale est une isométrie.

◁ **Éléments de preuve.**
Par récurrence forte. Puisque le lemme donnant l'existence d'un sous-espace stable strict est valide uniquement à partir de la dimension 3, il faut initialiser pour E de dimension inférieure ou égale à 2. L'étude précédente nous donne le cas $\dim(E) = 2$. ▷

Corollaire 12.3.28 – Classification des isométries en dimension 3

Toute isométrie d'un espace euclidien de dimension 3 se réduit sous l'une des formes suivantes, en base orthonormale $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$:

1. Isométrie directe : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$
   (rotation autour de l'axe $\mathbb{R}b_1$, dans le plan $\mathrm{Vect}(b_2, b_3)$)
2. Isométries indirectes : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
   (rotation autour de l'axe $\mathbb{R}b_1$ et réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(b_2, b_3)$)