Lycée Lakanal, Sceaux
MP – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 02/09/2024

DM n° 0 : Révision des méthodes calculatoires de MPSI

Exercice 1 –
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad xy'(x) + (1-x)y(x) = 1.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. Montrer que l'équation différentielle (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$: la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \text{pour } x \neq 0, \quad f(0) = 1.$$

Exercice 2 – On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{C}$ le nombre $g(x)$ est-il défini ?

   Dans la suite, on considère uniquement la fonction g de la variable réelle.
2. Trouver le développement d'ordre 2 en 0 de la fonction g. Quelles conclusions peut-on en tirer concernant la fonction g en 0 (continuité, dérivabilité, existence de $g''(0)$, allure du graphe) ? Donner, sur un petit schéma, l'allure locale de g au voisinage de 0.
3. En reprenant la méthode de calcul de la question précédente, montrer que g admet en 0 un développement limité à tout ordre et expliquer rapidement comment on s'y prendrait pour obtenir le développement d'ordre n. On peut donc trouver une suite (c_n) de nombres réels telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{i!} t^i + o(t^n) \quad \text{au voisinage de } 0.$$

4. En écrivant $t = g(t)(\mathrm{e}^t - 1)$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = -\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n+1}{p} c_p$.
5. Montrer que g est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
6. Étudier la fonction g : variations et branches infinies. Donner l'allure de la représentation graphique de g.

Exercice 3 – Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(n\theta)}{5 + 4\cos\theta} \, \mathrm{d}\theta$.

1. Montrer que

$$J_{n+1} + J_{n-1} = \begin{cases} -\dfrac{5}{2} J_n & \text{si } n \neq 0, \\ -\dfrac{5}{2} J_n + \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

   On commencera par simplifier $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)$ et décomposer en éléments simples $\dfrac{2x}{5+4x}$.
2. Justifier l'existence de quatre constantes réelles a, b, α, β telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = a\alpha^n + b\beta^n$. Préciser la paire α, β (on imposera la relation $\alpha < \beta$). On ne demande pas à ce stade de calculer a, b.
3. Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée. On majorera explicitement $|J_n|$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = b\,\beta^n$.
5. En remarquant que $n \mapsto J_n$ est paire, donner une relation simple entre J_0 et J_1. En déduire b.
6. Quel est le comportement asymptotique de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
7. Retrouver ce résultat à l'aide d'une intégration par parties de $J_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{5 + 4\cos\theta} \cdot \cos(n\theta) \, \mathrm{d}\theta$.

Exercice 4 – Soit P un polynôme unitaire (*i.e.* de coefficient dominant 1) de degré $n \in \mathbb{N}$.

1. Décomposer la fraction $\dfrac{P}{\prod_{i=0}^{n}(X-i)}$ en éléments simples.
   On exprimera les coefficients à l'aide de coefficients binomiaux et de valeurs de la fonction polynôme P.
2. En étudiant le comportement en $\pm\infty$ de $\dfrac{xP(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x-i)}$, montrer la relation $n! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}P(k)$.
3. Montrer que $\max_{0\leqslant k\leqslant n}|P(k)| \geqslant \dfrac{n!}{2^n}$.

Exercice 5 –

1. Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} |z| & = & 1 \\ |z+1| & = & 1 \end{array}\right.$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Interpréter géométriquement le résultat.

   Dans la suite de l'exercice, pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n le polynôme réel $P_n = (X+1)^{n+1} - X^{n+1} - 1$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est un zéro multiple de P_n si et seulement si $(z+1)^n = z^n = 1$.
   En déduire que, dans ce cas, z est l'un des deux nombres complexes j, $\overline{j}$, où $j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2\pi/3}$.
3. Montrer que j est un zéro multiple de P_n si et seulement si n est un multiple de 6. Quelle est alors la multiplicité de ce zéro ?
   Qu'en déduire concernant $\overline{j}$?
4. Factoriser le polynôme P_6 sur $\mathbb{C}$. En déduire que P_6 divise P_{6n} pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction $\dfrac{1}{P_6}$.

Exercice 6 –

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un unique $a_n \in I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan a_n = a_n$.
2. Que vaut a_0 ? Vérifier que $n \mapsto a_n$ est impaire.

On va étudier le comportement asymptotique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer que $a_n \sim n\pi$ quand $n \to +\infty$. On pose alors $\theta_n = a_n - n\pi \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. Un petit schéma devrait vous amener à conjecturer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{\pi}{2}$
4. Justifier la relation $\theta_n = \operatorname{Arctan} a_n$. En déduire le résultat conjecturé.
5. Montrer que
   $$\theta_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
   et en déduire un développement asymptotique de a_n quand n tend vers $+\infty$.
   On rappelle que, pour $t > 0$, $\operatorname{Arctan} t = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{t}$.
6. En reprenant la même méthode, trouver une constante c telle que $\theta_n = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 7 – Soit la fonction φ d'une variable réelle définie par

$$\varphi(x) = \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

1. Quel est le domaine de définition D de φ ?
2. Pour simplifier l'expression de $\varphi(x)$ et simplifier l'étude de la fonction, pour $x \in D$, on écrit $x = \sin t$ avec $t \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. Cela revient à poser $t = \operatorname{Arcsin}(x)$. Justifier la relation $\varphi(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin(2t))$.
3. Justifier que, pour $x \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, $\varphi(x) = 2\operatorname{Arcsin}(x)$.
4. Exprimer de même simplement $\varphi(x)$ en fonction de $\operatorname{Arcsin}(x)$ pour $x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$. Quelle expression obtient-on pour $x \in [-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$?
5. Déduire la courbe représentative de φ de celle de Arcsin.
6. Retrouver les relations des questions 3 et 4 à l'aide du calcul différentiel.