Lycée Lakanal, Sceaux
MP – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 11/09/2024

DM n° 1 : Révisions sur les suites numériques

Ce DM est à rendre au format numérique, scanné en pdf en un seul fichier n'excédant pas 10 Mo. Le nom du fichier doit être `dm01-nom.pdf` *où* `nom` *doit être remplacé par votre nom de famille. Le fichier doit être envoyé à l'adresse* `alain.troesch.pro+dm@gmail.com`, *avant minuit, le soir de la date de remise. Merci de respecter scrupuleusement ces consignes. Si toutefois vous rencontrez des problèmes techniques pour scanner ou envoyer votre DM, je l'accepte sous format papier.*

Exercice 1 – *L'objet de cette exercice est l'étude de suites définies par une récurrence du type* $u_{n+2} = f\left(\frac{u_{n+1}+f(u_n)}{2}\right)$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f *étant une certaine fonction définie sur un intervalle* J *de* $\mathbb{R}$.

1. Quelques propriétés générales
   (a) Soit I un intervalle tel que $I \subset J$. Montrer que si I est un intervalle stable par f et si u_0 et u_1 sont dans I, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
   (b) Montrer que si I est un intervalle stable par f, si f est croissante sur I, et si u_0, u_1, u_2 sont dans I et vérifient $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
   (c) Montrer que si $u_1 = f(u_0)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On s'intéresse maintenant au cas où f *est donné par* $f : x \mapsto \frac{1}{2}\sin x$.

2. Écrire une fonction en Python prenant 3 paramètres a, b et n correspondant respectivement aux deux termes initiaux u_0 et u_1, et à un indice $n \in \mathbb{N}$, et calculant u_n (on rappelle qu'ici, $f = \frac{1}{2}\sin$).

3. Étude générale de la récurrence définie par
$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{u_{n+1} + \frac{1}{2}\sin u_n}{2}\right)$$
   (a) Montrer que $[0, 1]$ est stable par f. **On suppose désormais que u_0 et u_1 sont dans $[0, 1]$.**
   (b) Justifier que pour tout $n \geqslant 0$,
$$u_{n+2} \leqslant \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{1}{8}u_n.$$
   (c) En déduire la limite de u_n.

4. Étude d'un cas particulier.
   On suppose toujours que $f = \frac{1}{2}\sin$, *et on suppose de plus que* $u_0 = \frac{\pi}{6}$ *et* $u_1 = \frac{1}{4}$.
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sin u_n$.
   (b) Justifier que (u_n) est décroissante, de limite nulle.
   (c) Montrer que pour tout $a \in [0, \frac{1}{2}[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant a^{n-N}u_N$.

Exercice 2 –
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 4}{u_n - 1}$.

1. **Étude de l'existence de** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (a) Justifier que $f : x \mapsto \dfrac{2x+4}{x-1}$ est une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dans $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, et exprimer explicitement sa réciproque g.
   (b) Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = g(v_n)$.
   Montrer que (u_n) est bien définie si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a \neq v_k$.
   (c) En étudiant les variations de g sur l'intervalle $]-\infty, 2[$, dont on justifiera qu'il est stable par g, étudier les variations des suites (v_{2n}) et (v_{2n+1}).

(d) Déterminer les points fixes de $g \circ g$, et en déduire que (v_n) est convergente. Quelle est la valeur de sa limite ?

2. **Convergence de** (u_n)

   On suppose dans toute cette question que $a \notin \{v_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. Ainsi, la suite (u_n) est bien définie.

   (a) Déterminer les points fixes de f et de $f \circ f$.

   (b) Étudier les variations de f et montrer que $]1, +\infty[$ est un intervalle stable par f.

   (c) Supposons $a \in]1, +\infty[$. Étudier la monotonie de (u_{2n}) et (u_{2n+1}). En déduire que (u_n) converge, et préciser sa limite.

   (d) Supposons $a \in]-\infty, -5[$. Justifier l'existence de la limite de (u_n), et donner sa valeur.

   (e) Supposons $a \in]\frac{1}{7}, 1[$. Justifier l'existence de la limite de u_n et donner la valeur de sa limite.

   (f) Supposons $a \in]-5, \frac{1}{7}[$, $a \neq -1$, et supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-5, \frac{1}{7}[$. En étudiant le signe de $x \mapsto f \circ f(x) - x$, étudier les variations de (u_{2n}), et aboutir à une contradiction. Que peut-on dire de la limite de (u_n) lorsque $a \in]-5, \frac{1}{7}[$?

   (g) Effectuer une synthèse des résultats précédents.

3. **Étude de la vitesse de convergence de** (u_n) On suppose que $a > 1$ et $a \neq 4$.

   (a) Justifier qu'il existe une suite (c_k) de réels convergeant vers 4 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$u_n - 4 = (u_0 - 4) \prod_{k=1}^{n} f'(c_k).$$

   (b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln |f'(c_k)| = \ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$

   (c) En déduire l'existence d'une suite (w_n) telle que $w_n = o(n)$, et

   $$\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n - 4| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \mathrm{e}^{w_n}.$$

   (d) En déduire que :

   $$\forall r > \frac{2}{3},\quad |u_n - 4| = o(r^n) \qquad \text{et} \qquad \forall r \in [0, \frac{2}{3}[,\quad r^n = o(|u_n - 4|).$$

Problème – (Étude asymptotique d'une suite récurrente et d'une série associée)

On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \geqslant 0 \text{ et, pour } n \geqslant 1,\quad u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

On admettra dans ce problème que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (n+1) \cdots (n+p) x^n = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}} \qquad \textit{(formule du binôme négatif).}$$

Cette formule affirme qu'on peut dérivée la série géométrique terme à terme. On généralisera ce résultat dans un chapitre ultérieur.

Partie I – Étude asymptotique de la suite (u_n)

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
2. Montrer que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(1 + x).$$

3. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant n + \dfrac{u_0}{2^n}$, puis que $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0.
4. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$
5. À l'aide d'un développement limité en 0 de $\sqrt{1+x}$, montrer qu'il existe une constante c qu'on déterminera, telle que

   $$u_n \underset{+\infty}{=} \sqrt{n} + c + o(1).$$

6. En déduire un développement asymptotique à la précision $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ de u_n, puis un développement asymptotique à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Pour pouvoir poursuivre le problème, on supposera qu'on a trouvé

$$u_n \underset{+\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

7. Montrer que (u_n) est croissante à partir d'un certain rang, et que $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante à partir d'un certain rang.

8. (a) Quelle est, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général u_n^α ?

   (b) Quelle est, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n^\alpha$? On précisera les cas de convergence absolue et de semi-convergence.

Partie II – Équivalent d'une série

On pose, lorsque la série converge, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n x^n$, *et* $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sqrt{n} x^n$.

1. Déterminer les domaines de définition de f et g, et préciser pour quelles valeurs la convergence est absolue.

2. Montrer que $f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

3. Soit (a_n) et (b_n) deux suites positives telles que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$. On suppose que $A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie (au moins) sur $]-1,1[$ et que $A(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

   (a) Montrer que $B(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_n x^n$ est définie au moins sur $]-1,1[$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe n_0 tel que

   $$\forall x \in]0,1[, \quad \left| \sum_{n > n_0} a_n x^n - \sum_{n > n_0} b_n x^n \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} A(x).$$

   (c) En déduire que $A(x) \underset{1^-}{\sim} B(x)$.

4. (a) Justifier que pour tout $x \in]-1,1[$,

   $$g(x)^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} n \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)} x^n.$$

   (b) Justifier qu'il existe une constante α telle que

   $$g(x)^2 \underset{1^-}{\sim} a \sum_{k=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) x^n.$$

   On exprimera a sous forme d'une intégrale (qu'on ne demande pour le moment pas de calculer)

   (c) En déduire qu'il existe une constante β qu'on exprimera en fonction de α, telle que

   $$f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{\beta}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

   (d) Calculer b.

Partie III – Développement asymptotique de $f(x)$

On cherche à calculer le terme suivant du DA de f au voisinage de 1^-. Pour cela, il faut estimer la vitesse de convergence de la somme de Riemann utilisée dans le calcul précédent, ce qui n'est pas complètement immédiat, car la fonction considérée n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout l'intervalle d'intégration.

1. Soit n pair. On pose $n = 2m$. On pose $h : x \mapsto \sqrt{x(1-x)}$.

(a) Justifier que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} h\left(\frac{k}{n}\right),$$

et que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{1} h(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=m}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right).$$

(b) En déduire que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 h(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n}\sup_{x\in[0,1]} h(x).$$

2. On suppose n impair, et on pose $n = 2m+1$.

(a) Justifier que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^{\frac{m}{n}} h(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} h\left(\frac{k}{n}\right)$$

et que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=m+2}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{m+1}{n}}^{1} h(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)$$

(b) En déduire que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 h(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{3}{n}\sup_{x\in[0,1]} h(x).$$

3. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 h(t)\ \mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

On admet que sous les hypothèses de la question II-3, si on remplace $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ par $b_n = O(a_n)$, alors $B(x) \underset{-1}{=} O(A(x))$, et de même pour o. La preuve est similaire à celle qu'on a donnée pour l'équivalence.

4. Montrer que $g(x) = \dfrac{\beta}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\right)$.

5. En déduire le DA de $f(x)$ au voisinage de 1^- à la précision $o\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ (on pourra l'exprimer en fonction de β et c si on n'est pas parvenu à déterminer cette constante).