

DM n° 7 : Séries

Ce DM est à rendre au format numérique, scanné en pdf en un seul fichier n'excédant pas 10 Mo. L'envoi se fera via Cahier-de-Prépa avant la date et heure ci-dessus.

Problème 1 – (Étude de propriétés de séries semi-convergentes, d'après Centrale PSI 2009)

Modifications apportées au sujet :

- programmation en Python au lieu de Mathematica ou Maple, et suppression des rappels liés à ces langages ;
- suppression d'une ou deux questions de programmation ;
- Modification de la question II-5(c), afin de mieux exploiter les propriétés de sommation de relations de comparaison.
- Ajout de l'estimation plus précise à $O(1)$ de p_n dans la partie I (question I-6)
- Ajout de l'estimation plus précise de n_k à $O(1)$ dans la question II-5(e).
- Ajout de la question II-8 adaptant la caractérisation des suites vérifiant (P_1) au contexte vectoriel.
- Modification des alinéas et de la numérotation des questions.

Rappels et définitions

- On rappelle le résultat suivant : toute partie X **non vide** de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément noté $\min(X)$
- On dira qu'une série à termes réels est *semi-convergente* si elle converge sans converger absolument.
- On dira qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété (P_1) si pour toute suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.
- On dira qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété (P_2) , si pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$.

L'objectif du problème est d'étudier, en particulier à l'aide de méthodes algorithmiques, des propriétés et des contre-exemples de la théorie des suites et des séries et de caractériser simplement les suites qui vérifient (P_1) ou (P_2) .

Les parties I et II sont indépendantes (et peuvent être vues comme deux problèmes séparés)

Les correcteurs tiendront compte de la présentation, particulièrement de la position correcte des indices.

Partie I – Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

On se donne un réel x . On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et on se propose de construire une bijection s de $\mathbb{N}^*$ dans

$\mathbb{N}^*$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{s(n)} = x$.

1. On définit simultanément par récurrence trois suites d'entiers naturels $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et une suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels de la manière suivante :

- $p_0 = q_0 = 0$, $S_0 = 0$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
 - * si $S_n > x$, alors $q_{n+1} = 1 + q_n$, $p_{n+1} = p_n$ et $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$;
 - * sinon, $q_{n+1} = q_n$, $p_{n+1} = 1 + p_n$ et $s_{n+1} = 2p_{n+1}$.

Dans les deux cas, $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$.

On aura intérêt à comprendre la construction précédente sous forme algorithmique.

- (a) Écrire une fonction `suite` en Python, qui prend en argument x et l'entier n et qui renvoie la liste $[s_1, s_2, \dots, s_n]$.
- (b) En modifiant la fonction précédente de façon à ce qu'elle retourne le dessin simultané de la liste des points de coordonnées $(n, S_n)_{n \leq 70}$ et de la droite horizontale d'ordonnée x (on ne demande pas d'écrire cette nouvelle fonction), on obtient pour $x = -1$ et $n = 70$ le dessin de la figure ??.

Que constate-t-on pour la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Expliquer le principe de l'algorithme.

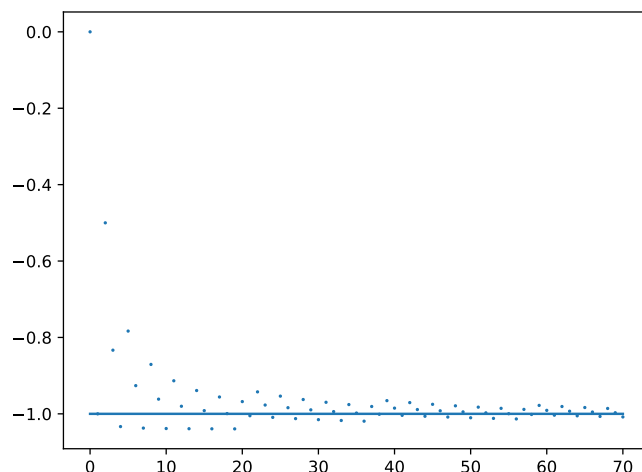


FIGURE 1 – Affichage des points (n, S_n)

2. On pose dorénavant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s(n) = s_n$.

Prouver, pour $n \geq 1$, les propriétés suivantes :

- $\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$
- $p_n + q_n = n$
- $S_n = u_{s(1)} + \dots + u_{s(n)}$.

En déduire que s est injective.

3. (a) Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

(b) On se propose de démontrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît vers $+\infty$.

i. On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée.

Utiliser la question précédente pour démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$S_n > x \quad \text{et} \quad S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$

En déduire une contradiction.

ii. Dédire du raisonnement précédent que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

(c) Justifier rapidement que (q_n) tend vers $+\infty$.

(d) Dédire de ce qui précède que s est une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même.

4. (a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| \quad \text{ou} \quad |S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|.$$

(b) Démontrer que pour tout naturel N , il existe un entier $n > N$ tel que $|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$.

(c) Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$.

(d) Soit $n \geq n_0$. On note $v_n = \max(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|)$.

Démontrer que $(v_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

(e) Démontrer que (S_n) converge vers x et conclure.

5. (a) Démontrer l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

(b) Donner un développement analogue pour $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$ en fonction de γ .

(c) i. Justifier, pour tout naturel n tel que $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$, l'égalité :

$$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.$$

ii. En déduire que :

$$S_n = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_n}{n - p_n} \right) - \ln(2) + o(1).$$

iii. En déduire un équivalent simple de p_n et q_n .

iv. Déterminer la limite de $\frac{|u_{s(1)}| + |u_{s(2)}| + \dots + |u_{s(n)}|}{|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

6. Donner une estimation à $O(1)$ de p_n .

On pourra pour cela justifier que $S_n = x + O\left(\frac{1}{n}\right)$, et améliorer le développement asymptotique de la question I-5(a).

Partie II – Suites vérifiant P_1 et P_2

1. Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie (P_1) .

2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

(a) Prouver que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite.

(b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. On note $U_n = u_0 + \dots + u_n$.

Prouver, pour tout entier naturel N , la relation :

$$\sum_{n=0}^N a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N.$$

En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (P_2) .

3. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge. Caractériser les suites complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant (P_1) .

4. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On se propose de construire une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0, telle que la série $\sum a_n \varepsilon_n$ diverge. Pour cela, on définit par récurrence trois suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit :

- $p_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, $A_0 = a_0$;
- Pour $n \geq 1$:
 - * $p_n = 1 + p_{n-1}$ et $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2}$ si $A_{n-1} \geq p_{n-1}$,
 - * $p_n = p_{n-1}$ et $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$ sinon.

Dans tous les cas, $A_n = A_{n-1} + a_n \varepsilon_n$.

(a) Dans cette question seulement on suppose que $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{9}{4(n+1)}$.

Déterminer les 6 premiers termes des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Démontrer que pour tout entier naturel N , il existe un entier $n > N$ tel que $p_n = 1 + p_{n-1}$ (on pourra raisonner par l'absurde)

En déduire qu'on peut définir une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ strictement croissante d'entiers par :

$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\} \quad \text{pour } k \geq 0. \end{cases}$$

(c) Dans le cas général, calculer p_{n_k} et ε_{n_k} .

Prouver que la suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 et que la série $\sum \varepsilon_n a_n$ diverge.

5. Dans cette question seulement, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n+1}$, et on reprend la construction et les définitions de la question 4.

(a) Soit $k \geq 3$ un indice tel que $n_k - 2 > n_{k-1}$. Prouver l'inégalité :

$$k - 1 \leq A_{n_k-1} \leq k - 1 + \frac{1}{2^{k-1}n_k}.$$

En déduire que $n_{k+1} - 2 > n_k$.

(b) Calculer explicitement la différence $A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}$ en fonction de k , n_k et n_{k+1} . En déduire, pour $k \geq 3$, l'inégalité

$$\frac{1}{2^k} \ln \left(\frac{n_{k+1} + 1}{n_k + 1} \right) \leq A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leq \frac{1}{2^k} \ln \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} \right)$$

(c) Déduire des deux questions précédentes, pour $k \geq 3$, l'inégalité :

$$2^k - \frac{2}{n_k} \leq \ln \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} \right) \leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln \left(1 + \frac{1}{n_{k+1}} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{n_k} \right).$$

(d) En déduire un équivalent de $\ln n_k$ lorsque k tend vers $+\infty$, puis montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$n_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} C e^{2^k}.$$

En déduire que

$$A_{n_k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln(n_k))}{\ln(2)} \quad \text{puis:} \quad A_n \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}.$$

(e) Montrer que $n_k = C e^{2^k} + O(1)$.

6. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour tout suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.

(a) Prouver que pour toute suite (ε_n) de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.

(b) En déduire que la série $\sum |a_n|$ converge.

7. Soit maintenant $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum x_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n x_n$.

(a) Prouver que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

(b) Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver la convergence de la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$.

(c) Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

(d) Caractériser les suites vérifiant (P_2) .

8. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que si on remplace dans la définition de (P_1) la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ complexe par une suite $(A_n) \in E^n$ (la suite (u_n) reste en revanche une suite complexe), alors (A_n) vérifie (P_1) si et seulement si $\sum A_n$ est absolument convergente.

On pourra choisir convenablement la norme, de sorte à pouvoir adapter le raisonnement de II-3 sur un seul coefficient.