Lycée Lakanal, Sceaux
MP – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 20/12/2024, 8h00

DM n° 11 : Suites et séries de fonctions

Ce DM est à rendre au format numérique, scanné en pdf en un seul fichier n'excédant pas 10 Mo. L'envoi se fera via Cahier-de-Prépa avant la date et heure ci-dessus.

Exercice 1 – (Premier théorème de Dini)
Soit E un evn de dimension finie, K un compact de E, et (f_n) une suite de fonctions de K dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue

(ii) f_n converge simplement vers f également continue

(iii) pour tout $x \in K$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

1. Montrer que si (K_n) est une suite de compacts non vides, décroissante pour l'inclusion, alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est non vide.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que l'ensemble $K_n = \{x \in K, \quad \|f_n(x) - f(x)\|\}$ est compact.
3. Déduire des deux questions précédentes que (f_n) converge uniformément.
4. Application : Montrer que la suite définies sur $[0, 1]$ par $P_0 = 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1], \quad P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t)$$
converge uniformément vers une fonction simple à déterminer.

Exercice 2 – (Deuxième théorème de Dini)
Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, et que f est continue.

1. Montrer que f est croissante.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$,
$$\left| f\left(a + k\frac{(b-a)}{p}\right) - f\left(a + (k+1)\frac{(b-a)}{p}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$
3. Justifier l'existence de N tel que pour tout $n \geqslant N$ et tout $p \in [\![0, p-1]\!]$,
$$\left| f_n\left(a + k\frac{(b-a)}{p}\right) - f\left(a + k\frac{(b-a)}{p}\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{8},$$
puis donner un majorant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $p \in [\![0, p-1]\!]$, et tout $x \in \left[a + k\frac{(b-a)}{p}, a + (k+1)\frac{(b-a)}{p}\right]$, de $\left|f_n(x) - f_n\left(a + k\frac{(b-a)}{p}\right)\right|$.
4. En déduire que (f_n) converge uniformément vers f (deuxième théorème de Dini).

Exercice 3 – (Convergence au sens de Riemann)
On suppose que la série complexe $\sum a_n$ converge. Pour $h \neq 0$, on pose :
$$f(h) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{\sin(nh)}{nh}\right)^2.$$

1. Justifier que (a_n) est bornée.

2. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$, et que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{\sin(nh)}{nh}\right)^2$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}\backslash[-a, a]$, pour tout $a > 0$.
3. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
4. Dans cette question uniquement, on suppose que $\sum a_n$ est absolument convergente. Montrer qu'alors, $f(h)$ admet une limite lorsque $h \to 0$, qu'on exprimera sous forme d'une somme.
5. On pose g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$g(t) = \begin{cases} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 & \text{si } t \in \mathbb{R}_+^* \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$
   (b) Justifier que g est bornée sur $\mathbb{R}_+$
   (c) Montrer que g' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $h \neq 0$,

$$R_n(h) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \left(\frac{\sin(kh)}{kh}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $h \in \mathbb{R}_+^*$,

$$|R_n(h)| \leqslant |r_n g((n+1)h)| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |r_k||g((k+1)h) - g(kh)|$$

   (b) À l'aide de la question 5(c), montrer que R_n converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Montrer que f admet une limite en 0, que l'on exprimera sous forme d'une somme.