LYCÉE LAKANAL, Sceaux
MP – Mathématiques
A. TROESCH

Pour le 08/01/2025, 22h00

DM n° 12 : Suites et séries de fonctions, intégrales à paramètres

Ce DM est à rendre au format numérique, scanné en pdf en un seul fichier n'excédant pas 10 Mo. L'envoi se fera via Cahier-de-Prépa avant la date et heure ci-dessus.

Consignes de travail

1. Faire vos inscriptions aux concours sur le site de SCEI.
2. Écrire votre MCOT.
3. Revoir votre cours de la dernière période. En particulier, les énoncés des derniers chapitres traités (suites et séries de fonctions, intégrales à paramètres) doivent être connus de façon très précise, avec toutes les hypothèses au complet. Étudiez bien les exemples pour bien comprendre comment s'utilisent ces théorèmes.
4. Réviser les chapitres de MPSI concernant :
   - les produits scalaires, espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens
   - les probabilités
   - L'analyse réelle globale (TVI, Rolle, Taylor etc)
5. Revoir les exercices les plus significatifs des derniers chapitres :
   - Chapitre 6 : 16, 17, 19, 20, 27, 31, 32
   - Chapitre 7 : 9, 10, 14, 15, 17, 19, 20, 25, 29, 33, 36, 45, 47, 49, 50
   - Chapitre 8 : 6, 8, 10, 13, 14, 16, 22, 28, 33, 34, 37, 43
   - Chapitre 9 : 22, 23, 26, 28, 32, 38, 42, 45, 47, 53, 55, 56, 58
   - Chapitre 10 : 12, 14, 18, 20, 24
6. Préparer les exercices suivants du chapitre 10 (ceux du chapitre 11 viendront plus tard). Pour information, le prochain DS portera sur les chapitres 10 et 11. En priorité les exercices suivants :

   25, 27 à 36, 39, 41, 43, 44, 45.
7. Fair le DM ci-dessous. La partie V du problème 2 est facultative.

Note importante : l'exercice est à faire avant les deux problèmes. Il permet en effet d'établir certains résultats sur les séries entières nécessaires dans ces problèmes et qu'on n'a pas encore vu en cours. Dans les deux problèmes, vous pouvez utiliser sans les redémontrer le développement en série entière de $\ln(1+x)$ pour $x \in]-1,1[$ (mais pas au point $x = 1$ qui est redemandé en question), ainsi que la formule du binôme négatif, vus comme exemple du cours.

Exercice 1 – (Introduction aux séries entières)

Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$, où a_n ne dépend pas de x. Le but de cet exercice est de démontrer quelques propriétés élémentaires de ces séries de fonctions. On se donne (a_n) une suite de complexes.

1. Soit $R = \sup\{x \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n x^n) \text{ est bornée }\}$.
   (a) Justifier que R est bien défini dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.
   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Justifier l'existence de $r > |z|$, tel que $a_n z^n = O\left(\left(\frac{|z|}{r}\right)^n\right)$.
   (c) En déduire que $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ et diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$.

   L'élément R de $\overline{\mathbb{R}}_+$ est appelé rayon de convergence (ou simplement rayon) de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Quel est le rayon de convergence des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$? $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$? $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^n$? $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$? $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n! z^n$?
3. A-t-on en général divergence pour $|z| = R$? Convergence ? La série est-elle de même nature sur tout le cercle $S(0,R)$?

4. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et on note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en tout x en lequel la série converge.
   (a) Montrer que $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur tout segment $[-a, a]$. Que peut-on en déduire à propos de la continuité de S ?
   (b) Justifier que $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ est une série entière de rayon de convergence R (on pourra comparer $|n a_n x^{n-1}|$ à $|a_n| r^n$, pour un r bien choisi).
   (c) Montrer que $\sum a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et exprimer sa dérivée sous forme d'une somme. Exprimer a_n en fonction de $f^{(n)}$.

Problème 1 – (CCINP MP 2019)

Introduction

Dans ce sujet, une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} a_n \dfrac{x^n}{1 - x^n}$ où $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n \geqslant 1} a_n x^n$ soit de rayon 1.

Partie I – Propriétés

Soit une série de fonctions $L_a : \sum_{n \geqslant 1} a_n \dfrac{x^n}{1 - x^n}$

1. Soit $x \in]-1, 1[$, donner un équivalent de $1 - x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.
   Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n \dfrac{x^n}{1 - x^n}$ converge absolument.
   Remarque *: la série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $]-1, 1[$.*
   Donner un exemple de suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un point x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $]-1, 1[$.
2. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} a_n \dfrac{x^n}{1 - x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[-b, b]$ inclus dans l'intervalle $]-1, 1[$.
3. On pose, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1 - x^n}$.
   Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-1, 1[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]-1, 1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.
4. Expression sous forme de série entière.
   On note $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
   Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p) \in A}$ est une famille sommable de réels, justifier que
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right) \text{ où } I_n = \{(k,p) \in A, kp = n\}.$$
   Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p) \in A}$ est sommable.
   En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \sum_{d|n} a_d$.
   ($d|n$ signifiant d divise n).

Partie II – Exemples

5. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n. Exprimer pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{1 - x^n}$ comme la somme d'une série entière.

6. Dans cette question, pour $n \geqslant 1$, $a_n = \varphi(n)$ où n est le nombre d'entiers naturels premiers à n et inférieurs à n. Justifier que la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est de rayon 1.

   On admet que pour $n \geqslant 1$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

   Pour $x \in]-1,1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ sous forme d'un quotient de deux polynômes.
7. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1,1[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
8. Dans cette question et la suivante, pour $n \geqslant 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout $x \in]-1,1[$,

   $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

   En utilisant le théorème de la double limite calculer $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. Retrouver le dernier résultat de la question **Q6.**
9. Démontrer qu'au voisinage de 1, $f(x) \sim \frac{-\ln 2}{1-x}$.

   On pourra remarquer que pour $x \in]0,1[$, $\frac{1-x}{1-x^n} = \frac{1}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$.

Problème 2 – (Fonction de Wallis, Mines MP 2023)

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1,+\infty[$ *de* $\mathbb{R}$ *est appelé* I *et* σ *et* f *sont les fonctions, de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, définies par :*

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \, \mathrm{d}t$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f *(domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série entière,...) puis, dans la dernière partie, de montrer qu'elle est la seule fonction numérique à vérifier certaines propriétés.*

Partie I – Calcul de $\sigma(1)$

1. Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.
2. Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\pi} \left(\alpha t^2 + \beta t\right) \cos(nt) \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

   puis vérifier que si $t \in]0,\pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

3. Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin(xt) \mathrm{d}t = 0$$

   et en conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

Partie II – Équivalents

4. Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I,\ (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2). \tag{1}$$

5. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I.
6. Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 .
7. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

8. Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

Partie III – Développement en série entière

Si $n \in \mathbb{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin t))^n \, \mathrm{d}t$.

9. Justifier que, si $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\mathrm{d}t$$

10. Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$
11. Vérifier que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}} \, \mathrm{d}u$$

puis que

$$D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

12. Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

Partie IV – Convergence de suite de fonctions

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b, et on pose

$$\rho = \frac{b-a}{b+a}$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) = \ln\left(a^2\cos^2(x) + b^2\sin^2(x)\right).$$

13. Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Psi'(x) = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)$$

14. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k.$$

15. En conclure que

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma\left(\rho^2\right).$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n\in N*}$ et $(b_n)_{n\in N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}.$$

16. Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de $]0,\pi[$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left]0,\pi\right], \Psi_n(t) = \ln\left(a_n^2\cos^2(t) + b_n^2\sin^2(t)\right)$$

En déduire $f''(0)$.

Partie V – Convexité logarithmique

Une application h d'un intervalle non trivial J de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite ln-convexe si, et seulement si, elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln \circ h$ est convexe sur J.

17. Vérifier que f est une application de I dans $\mathbb{R}$. ln-convexe.
On souhaite désormais déterminer toutes les applications de I dans $\mathbb{R}$ qui sont ln-convexes et qui vérifient la propriété (1), voir question 4.
On appelle $\tilde{f}$ l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \tilde{f}(x) = \ln(f(2x))$$

18. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \tilde{f}(x+p) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right).$$

19. On suppose ici que $x \in \mathbb{R}_+^*,\ (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $x \leqslant p$. Vérifier que

$$\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) \leqslant \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} \leqslant \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{p}$$

et que $(\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n))$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

20. En conclure que f est la seule application de I dans $\mathbb{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que

$$f(0) = \frac{\pi}{2}$$

21. Plus généralement, déterminer, si $T \in \mathbb{R}_+^*$, toutes les applications g de $]-T,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, ln-convexes et vérifiant

$$\forall t \in \left]-T,+\infty\right[, (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T)$$

22. Existe-t-il une application h, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ln-convexe, vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)?$$