Lycée Lakanal, Sceaux
MP – Mathématiques
A. Troesch

Pour le 12/02/2025, 22h00

DM n° 14 : Séries entières, variables aléatoires

Ce DM est à rendre au format numérique, scanné en pdf en un seul fichier n'excédant pas 10 Mo. L'envoi se fera via Cahier-de-Prépa avant la date et heure ci-dessus.

Problème 1 – (Centrale PC 2012, Math 1 – Un théorème de Hardy et Littlewood)

Si n et k sont deux entiers naturels, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Partie I – Approximation

1. **Quelques calculs préliminaires**

   Dans cette sous-partie, x est un nombre réel et n est un entier naturel.

   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$

   (b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$

   (c) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$

   (d) Déduire des questions précédentes que que

   $$\sum_{k=0}^{n} \left(x-\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

2. **Étude de $S(x)$**

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$. Le but de cette sous-partie est de majorer la somme

   $$S(x) = \sum_{k=0}^{n} \left|x-\frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

   (a) Majoration de $S(x)$: première méthode.

   On note

   - V l'ensemble des entiers $k \in \{0,\dots,n\}$ tels que $\left|x-\frac{k}{n}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$
   - W l'ensemble des entiers $k \in \{0,\dots,n\}$ tels que $\left|x-\frac{k}{n}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}$,

   et on pose

   $$S_V(x) = \sum_{k\in V} \left|x-\frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad \text{et} \qquad S_W(x) = \sum_{k\in W} \left|x-\frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

   i. Montrer que $S_V(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

   ii. Montrer que $S_W(x) \leqslant \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

   iii. En déduire que $S(x) \leqslant \dfrac{5}{4\sqrt{n}}$.

   (b) Majoration de $S(x)$: seconde méthode.

   i. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de son produit scalaire canonique.

   ii. À l'aide de la question I-1(d), en déduire que $S(x) \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

3. **Application à l'approximation uniforme**

Dans cette sous-partie, on note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$; On munit $\mathcal{C}$ de la norme de la borne supérieure, notée $\|\cdot\|_\infty$:

$$\forall f \in \mathcal{C}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Pour $f \in \mathcal{C}$, et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième polynôme de Berstein de f, noté $B_n(f)$, en posant, pour tout $x \in [0,1]$:

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}.$$

Le but de cette question est d'étudier $\|B_n(f) - f\|_\infty$ lorsque f est un élément de $\mathcal{C}$ vérifiant une hypothèse additionnelle.

(a) Un exemple. Si $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [0,1]$, déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(f)$ et en déduire la valeur de $\|B_n(f) - f\|_\infty$.

(b) Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

(c) i. Montrer que si f est δ-lipschitzienne, alors $\|B_n(f) - f\|_\infty \leqslant \dfrac{\delta}{2\sqrt{n}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

ii. En déduire que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors il existe un réel c tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|B_n(f)-f\|_\infty \leqslant \dfrac{c}{\sqrt{n}}$.

iii. Étendre le résultat précédent au cas où f est une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

(d) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel $r > 0$, il existe un polynôme P à coefficients réels tel que pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) - r \leqslant P(x) \leqslant f(x) + r.$$

Partie II – Un théorème de Hardy et Littlewood

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ admet pour rayon de convergence $R = 1$, et que la somme f de cette série, définie par

$$\forall x \in]-1,1[, \; f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

vérifie :

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x} \tag{1}$$

On note

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \text{et} \qquad \widetilde{a_n} = \frac{A_n}{n+1}.$$

Ainsi, $\widetilde{a_n}$ est la moyenne arithmétique des nombres $a_0, \ldots, a_n$.

Le but de cette partie est d'étudier le comportement des a_n lorsque n tend vers l'infini. On s'intéresse en particulier aux deux propriétés suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \tag{2}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \widetilde{a_n} = 1. \tag{3}$$

1. **L'hypothèse (1) n'implique pas la propriété (2)**

(a) Déterminer une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

(b) En déduire un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (1) mais ne convergeant pas vers 1.

2. **L'hypothèse (1) n'implique pas la propriété (3)**

(a) Donner le développement en série entière de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^2}$ ainsi que son rayon de convergence. Préciser si la série converge aux bornes de l'intervalle de convergence.

(b) On considère les fonctions $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x^2)^2}$ et $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2(1-x)}$. Déterminer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n.$$

On explicitera, en fonction de n, suivant la parité de n, les réels u_n et v_n.

(c) Calculer $\widetilde{v_n}$ (moyenne arithmétique des nombres $v_0, \dots, v_n$).

(d) Construire à l'aide de ψ un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (1), mais ne vérifiant pas la propriété (3).

Jusqu'à la fin de cette partie, on continue de supposer (1), et on fait l'hypothèse supplémentaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geqslant 0. \tag{4}$$

L'objectif principal, après quelques observations concernant la suite $(\widetilde{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$, est de démontrer la propriété (3) (théorème de Hardy et Littlewood).

3. **Majoration de la suite $(\widetilde{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$.**

(a) Pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f(x) \geqslant A_n x^n$.

(b) Montrer qu'il existe $N > 0$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad f(\mathrm{e}^{-1/n}) \leqslant \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-1/n}}.$$

(c) En déduire que la suite $(\widetilde{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

4. **Minoration à partir d'un certain rang de $(\widetilde{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$**

On désigne par $\mu > 0$ un majorant de la suite $(\widetilde{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{a_n} \leqslant \mu$.

(a) i. Pour tout $x \in]-1,1[$, montrer que $(1-x)\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k = f(x)$.

ii. En déduire que pour tout $x \in [0,1[$, et tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{f(x)}{1-x} \leqslant A_{N-1}\frac{1-x^N}{1-x} + \mu \sum_{k=N}^{+\infty}(k+1)x^k.$$

iii. En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$f(x) \leqslant A_{N-1} + \mu\left((N+1)x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x}\right).$$

(b) Soit λ un réel strictement positif.

i. Montrer qu'il existe un entier $N_0 > 0$ tel que pour tout $N \geqslant N_0$,

$$f(\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{N}}) \geqslant \frac{1}{2(1-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{N}})}x \geqslant \frac{N}{2\lambda}.$$

ii. Montrer que pour tout $N \geqslant N_0$,

$$\widetilde{a_{N-1}} \geqslant \frac{1}{2\lambda} - \mu\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 + \frac{1}{N} + \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{N}}\frac{1}{N(1-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{N}})}\right).$$

iii. Déterminer en fonction de λ la limite, quand N tend vers l'infini, du membre de droite dans l'inégalité précédente.

iv. Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que cette limite soit strictement positive.

(c) Conclure qu'il existe un réel $\nu > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang, on ait $\widetilde{a_n} \geqslant \nu$.

5. **Démonstration de la propriété (3) due à Karamata**

   Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $g(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$ et $g(x) = 0$ sinon.

   On fixe un réel $\varepsilon \in]0, \mathrm{e}^{-1}[$, et on définit deux applications continues $g^+,\ g^- : [0,1] \to \mathbb{R}$ ainsi :
   - g^+ est affine sur $[\mathrm{e}^{-1} - \varepsilon, \mathrm{e}^{-1}]$ et coïncide avec g sur $[0, \mathrm{e}^{-1} - \varepsilon] \cup [\mathrm{e}^{-1}, 1]$
   - g^- est affine sur $[\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1} + \varepsilon]$ et coïncide avec g sur $[0, \mathrm{e}^{-1}] \cup [\mathrm{e}^{-1} + \varepsilon, 1]$

   Pour tout entier $N > 0$, on pose $x_N = \mathrm{e}^{-1/N}$.

   On se rappelle que dans cette question, on fait les hypothèses (1) et (4).

   (a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 g^+(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 g^-(t)\ \mathrm{d}t$.

   (b) Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que

   $$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t.$$

   On considérera d'abord le cas particulier $P = X^k$, où $k \in \mathbb{N}$.

   (c) Établir l'existence de deux polynômes P et Q tels que

   $$\forall x \in [0,1],\quad g^-(x) - \varepsilon \leqslant P(x) \leqslant g(x) \leqslant Q(x) \leqslant g^+(x) + \varepsilon.$$

   (d) Établir l'existence d'un entier $N_1 > 0$ tel que pour tout entier $N \geqslant N_1$,

   $$(1 - x_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n P(x_N^n) \geqslant \int_0^1 P(t)dt - \varepsilon$$

   et

   $$(1 - x_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_N^n Q(x_N^n) \leqslant \int_0^1 Q(t)dt + \varepsilon$$

   (e) Déduire des trois questions précédentes que pour tout entier $N \geqslant N_1$,

   $$1 - 5\varepsilon \leqslant (1 - x_N) A_N \leqslant 1 + 5\varepsilon,$$

   (f) Conclure.

Problème 2 –

L'objet de ce problème est l'étude des séries de résultats identiques dans une suite d'expériences de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre $p \in]0,1[$.

Partie I – Probabilité d'obtenir r succès consécutifs

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désignera par S_n l'événement :

« Obtenir un succès à la n-ième expérience. »

1. On effectue une infinité d'expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre de $p \in]0,1[$ (par exemple des lancers de dé). En considérant les événements $E_n = S_{rn-(r-1)} \cap \cdots \cap S_{rn-1} \cap S_{rn}$, $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'événement « obtenir une série de r succès d'affilés » est quasi-certain.
2. Pour tout entier $n \geqslant r$, on désigne par U_n l'événement :

   « Obtenir une suite de r succès consécutifs s'achevant à la n-ième expérience, dont aucun d'eux n'a déjà été comptabilisé dans une suite antérieure de r succès consécutifs. »

On note $u_n = P(U_n)$. On posera *par convention* $u_0 = 1$ et $u_1 = u_2 = \ldots = u_{r-1} = 0$.

Par exemple, si $r = 3$, et si on désigne par S l'obtention d'un succès et par E l'obtention d'un échec, la suite d'expériences représentée par :

$$\underline{S\ S\ S}\ \underline{S\ S\ S}\ S\ E\ E\ \underline{S\ S\ S}\ S\ S\ E\ S\ E\ \underline{S\ S\ S}\ S\ E\ \ldots$$

mène à la réalisation des événements $U_3, U_6, U_{12}, U_{20}, \ldots$, c'est-à-dire de suites de 3 succès consécutifs s'achevant aux expériences 3, 6, 12, 20, ….

Montrer que la réalisation de l'événement $S_{n-(r-1)} \cap \ldots \cap S_{n-1} \cap S_n$ implique la réalisation d'un et un seul des événements $U_{n-(r-1)}, \ldots, U_{n-1}, U_n$ pour $n \geqslant r$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation

$$u_n + pu_{n-1} + p^2u_{n-2} + \cdots + p^{r-1}u_{n-r+1} = p^r. \tag{5}$$

3. Déterminer l'existence et la valeur L de la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II – Étude du temps d'attente moyen de la première suite de r succès consécutifs.

On désigne par X la variable aléatoire indiquant le numéro n de l'expérience où, *pour la première fois*, s'achève une suite de r succès consécutifs. Dans l'exemple ci-dessus, X prend donc la valeur 3. On posera *par convention* $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \cdots = \mathbb{P}(X = r - 1) = 0$.

On se propose de calculer le temps moyen d'attente de la première série par des techniques d'analyse, basées sur la notion de série génératrice.

1. Justifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.
2. On pose, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1[$: $U(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

   Justifier la convergence de cette série, puis établir à l'aide de (5) que :

   $$U(x) = 1 + \frac{(px)^r}{1 - (px)^r} \cdot \frac{1 - px}{1 - x}.$$

3. Montrer que pour tout $n \geqslant r$,

   $$u_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)u_{n-k} \tag{6}$$

4. On pose, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$: $G(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)x^n$.

   À l'aide d'un produit de Cauchy, trouver une relation liant $U(x)$ et $G(x)$ pour tout réel x appartenant à $[0, 1[$.
5. En déduire l'expression de $G(x)$ pour $0 \leqslant x < 1$, puis vérifier que G est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$.
6. Justifier qu'on peut dériver la série définissant G terme à terme, et en déduire $\mathbb{E}(X)$.
7. Application numérique : donner le temps d'attente moyen d'une série de 25 « un » consécutifs lors d'une succession de tirages d'un dé équilibré.

Partie III – Étude de la probabilité de ne pas obtenir une série de r résultats identiques

On répète une série de tirages équiprobables dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, avec remise, où $N \geqslant 2$. On suppose ces tirages indépendants. On note $p = \frac{1}{N}$, la probabilité d'obtention d'une boule fixée lors d'un tirage. Soit $r \geqslant 2$. On dit qu'une suite de n tirages est r-chanceuse si aucun numéro n'a été tiré r fois d'affilée. L'entier r étant fixé, pour $n \geqslant 1$, on note p_n la probabilité qu'une suite de n tirages soit r-chanceuse.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que $N = 2$ et $r = 2$. Calculer explicitement p_n et étudier sa limite.
2. Les entiers $N \geqslant 2$ et $r \geqslant 2$ sont maintenant supposés quelconques. Montrer que (p_n) est décroissante de limite nulle.

3. Montrer que pour tout $n \geqslant r$, $p_n = (1-p)\sum_{k=1}^{r-1} p^{k-1} p_{n-k}$.
4. Soit $f_r : x \mapsto x^r - \frac{1}{p}x^{r-1} + \frac{1-p}{p}$. Montrer que si $(r, N) \neq (2, 2)$, f_r admet un unique zéro positif différent de 1, qu'on notera λ_r. Montrer que $\lambda_r \in [\frac{1}{p} - 1, \frac{1}{p}[= [N-1, N[$, et justifier que $((p\lambda_r)^n)$ vérifie la même relation de récurrence que (p_n).
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n > p^n \lambda_r^n$.
6. Montrer que $(\lambda_r)_{r\geqslant 2}$ est convergente, et déterminer sa limite.
7. On suppose désormais que $N \geqslant 3$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{1}{3}]$, $(1-x^n)^n \geqslant 1-x$.
   (b) Montrer que pour tout $r \geqslant 2$,
   $$\frac{1}{p} - p^{r-2} \leqslant \lambda_r < \frac{1}{p}.$$
   Ainsi, λ_r converge très vite vers $\frac{1}{p}$.