Programme des colles de la semaine 1 (16/09 – 20/09)

Note à propos du cours et des exercices de la banque CCINP

- Chaque colle commencera systématiquement :
  * soit par un exercice de la banque CCINP, parmi les exercices cités dans le programme de colle,
  * soit par une question de cours.

  Cette partie de la colle ne devrait pas prendre plus de 15 à 20 minutes, de sorte à laisser le temps de faire un ou plusieurs exercices non préparés.
  Je souhaite que lors d'une heure d'interrogation, au moins un étudiant soit interrogé sur une question de cours, et au moins un sur un exercice de la banque CCINP.

- Je précise, à l'adresse des colleurs, que les étudiants disposent des énoncés et corrigés officiels de ces exercices, à l'adresse https://www.concours-commun-inp.fr/fr/epreuves/les-epreuves-orales.html.
  En revanche, sauf exception, ces exercices ne sont pas abordés en classe. À l'adresse des étudiants cette fois : si vous avez des questions sur ces exercices, n'hésitez pas à venir me voir.
  Les consignes données à l'oral CCINP sont de ne pas aider les étudiants sur l'exercice de la base publique. Le but étant, en cours d'année, d'arriver à une maîtrise la meilleure possible de ces exercices, le consigne n'est pas la même en cours d'année.

- Tous les points du cours peuvent faire l'objet d'une question de cours, qui pourra inclure ou non une démonstration, sauf :
  * les démonstrations indiquées comme étant non exigibles (NE) ; attention, dans le programme de colle, la mention (NE) se réfère exclusivement à la preuve et non à l'énoncé qui doit être connu !
  * les points marqués hors-programme (HP), sauf mention explicite du contraire ;
  * les démonstrations de MPSI non refaites cette années, sauf si j'ai indiqué d'aller les voir dans le cours de MPSI.
- Que ce soit pour la question de cours ou pour l'exercice CCINP, on demandera systématiquement une restitution orale, et non seulement l'exercice ou le cours rédigé au tableau. L'entraînement à l'explication orale des mathématiques est important pour les oraux de concours. À ce propos :
  * Il ne s'agit pas de lire ce que vous avez écrit au tableau, c'est inintéressant. Il faut que l'exposé oral apporte quelque chose.
  * Pour cela, ne rédigez pas tout au tableau, certaines hypothèses ou certains points de raisonnement pourront être précisés à l'oral (à condition de ne pas oublier de le faire). Le tableau doit vous servir en revanche à exposer les expressions un peu techniques. Celles-ci n'ont pas forcément besoin d'être lues entièrement lors de la présentation orale.
  * Durant l'année, du fait du passage simultané de 3 élèves, on vous demandera de d'abord faire votre rédaction abrégée au tableau, et de faire la présentation orale ensuite l'un après l'autre. Ce n'est pas la démarche adoptée lors des oraux de concours, pendant lesquels la présentation orale se fait tout en utilisant le tableau comme support en même temps.
  * Les colleurs pourront couper la présentation orale avant son terme, afin de gagner du temps, s'ils se rendent compte que l'étudiant maîtrise son sujet, et que la fin de la présentation écrite semble cohérente.
  * Pour les exercices CCINP, les colleurs sont invitée à poser une ou plusieurs questions en rapport avec la présentation, pour s'assurer que l'argument est bien compris, et pas seulement appris par coeur.
- Les colleurs sont invités à aider les étudiants à comprendre les points qui auraient pu leur échapper de bonne foi, aussi bien sur le cours que sur l'exercice CCINP. En revanche, il n'est pas question de reprendre le cours pour un étudiant qui n'a pas pris la peine de l'apprendre correctement, ou de perdre trop de temps sur un exercice CCINP non préparé. Ces situations seront sanctionnées de façon significative dans la note finale.

Chapitre 1 : Suites numériques et compléments

Exercices associés de la banque CCINP : 43, 55.

Les suites sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On insistera dans ce chapitre sur tout l'aspect asymptotique.

1. **Topologie réelle et complexe**
   - Intervalles
     - Rappel de la définition par convexité
     - Inventaire des intervalles décrits avec leur borne (NE)
   - Voisinages
     - Voisinage d'un point dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Notation $\mathcal{V}(a)$.
     - Voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$ dans $\mathbb{R}$.
     - Caractérisation des voisinages par $a \in I \subset V$, où I est un intervalle ouvert.
     - Union quelconque de voisinages, intersection finie de voisinages.
     - Notion de propriété satisfaite au voisinage d'un point.

   NB : pas d'ensemble ouvert ou fermé dans ce chapitre.

2. **Convergence**
   - Convergence, réexpression topologique
     - Limite d'une suite, convergence divergence ; limite infinie pour une suite réelle.
     - Unicité de la limite (revoir la preuve dans le cas de limites finies)
     - Caractérisation topologique de la limite (avec des voisinages)
   - Rappel des propriétés opératoires relatives à la convergence
     - Opération sur les limites finies : valeur absolue, somme, produit, quotient.

       Démonstrations non refaites. Voir la somme le produit dans le cours de MPSI
     - Opérations impliquant des infinis. Indéterminations.

       Démonstrations non refaites.
     - Opérations d'exponentiation et formes indéterminées.
   - Comportement des limites vis-à-vis des inégalités
     - Conservation des inégalités larges.

       Démonstration non refaite. Voir dans le cours de MPSI.
     - Théorème d'encadrement.

       Démonstration non refaite. Voir dans le cours de MPSI.
     - Théorème de divergence par minoration, majoration

       Démonstration non refaite. Voir dans le cours de MPSI.
     - Comparaison à une suite géométrique *via* l'étude de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
   - Propriétés des suites monotones
     - Théorème de la convergence monotone.

       Démonstration non refaite. Voir dans le cours de MPSI.
     - Suites adjacentes, théorème des suites adjacentes.

       Démonstration non refaite.

3. **Comparaisons asymptotiques**
   - Définitions de la négligeabilité, de la domination, et de l'équivalence. Notations o, O, $\sim$.
   - Reexpression en terme de quotient lorsque c'est possible.
   - Manipulations diverses de o, O, $\sim$ (transitivité, somme, produit, puissance constante etc)

     Démonstrations non refaites.
   - Mise en garde pour les sommes et compositions sur les équivalents.
   - Conservation des limites par équivalence ; conservation du signe.

     Démonstrations non refaites.
   - Équivalents classiques à bien connaître.
   - Formule de Stirling (NE).

4. **Suites récurrentes**
   - Récurrences linéaires
     - Notion générale de récurrence linéaire, à coefficients non nécessairement constants.
     - Structure d'ev et dimension de l'espace vectoriel des solutions.
     - Polynôme caractéristique d'une récurrence linéaire à coefficients constants
     - Explicitation des SRL (admis, HP pour les ordres $\geqslant 2$)
   - Suites récurrentes linéaires perturbées

  * Structure affine de l'ensemble des suites solutions d'une relation de récurrence linéaire avec second membre.
  * (HP) Recherche d'une solution particulière lorsque les coefficients sont constants et le second membre de la forme $P(n)\lambda^n$, $P \in \mathbb{C}[X]$. L'existence (et l'unicité) d'une solution sous la forme $n^\alpha Q(n)\lambda^n$ est admise.
  * Cas particulier des suites arithmético-géométriques.
- Récurrences $u_{n+1} = f(u_n)$.
  * Stabilité d'un intervalle, bonne définition de la suite
  * Étude graphique, en se servant de la première bissectrice.
  * Étude lorsque $f - \mathrm{id}$ est de signe constant sur un intervalle stable.
  * Étude lorsque f est coissante sur un intervalle stable.
  * Étude lorsque f est décroissante sur un intervalle stable.
  * Point fixe attractif. Majoration asymptotique de $|u_n - a|$ lorsque (u_n) converge vers un point fixe attractif (HP mais à savoir refaire car classique)
  * Théorème de la moyenne de Cesàro.
  * Exemples de calculs d'équivalents lorsque (u_n) converge vers un point fixe incertain, à l'aide du théorème de la moyenne de Cesàro.

Chapitre 2 : Cardinaux et dénombrements

Exercices associés de la banque CCINP : 112.

1. **Rappels sur les cardinaux finis**

   Sauf exception, les démonstrations de ce paragraphe de révision n'ont pas été refaites cette année et ne sont pas exigibles lors de la colle.
   - Ensembles finis, cardinaux
     * Définition d'un ensemble fini par mise en bijection avec un $[\![1, n]\!]$. Définition du cardinal.
     * Un sous-ensemble d'un ensemble fini est fini.
   - Rappel des propriétés calculatoires
     * Reexpression en terme de fonction indicatrice
     * Cardinal d'une union disjointe, d'un complémentaire, d'une union quelconque, d'un produit cartésien.
   - Rappel des grands principes combinatoires
     * Importance de la notion de bijection
     * Principe additif, tri, partitionnement.
     * Principe multiplicatif, lemme du berger. Exemple : dénombrement des injections, cardinal de $\mathfrak{S}_n$.
     * Démonstration combinatoire de formules, par recherche du modèle adéquat et en dénombrant de deux façons différentes (souvent en changeant l'ordre de lecture des composantes d'un couple).
     * Gestion de formules avec signes en construisant des bijections du type $X \mapsto X \triangle \{x_0\}$.
     * Révision de la formule de Vandermonde (démonstration combinatoire à savoir refaire)

Encore peu d'exercices traités en cours sur les thèmes suivants.

2. **Dénombrabilité**
   - Cardinaux infinis
     * Ensembles de même cardinal (équipotence)
     * Mises en garde sur le danger de trop faire confiance à son intuition. Exemple d'une inclusion stricte avec égalité des cardinaux (hôtel de Hilbert)
   - Dénombrabilité
     * Définition d'un ensemble dénombrable, au plus dénombrable.
     * Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$ par construction d'une bijection (une description visuelle rapide est suffisante, on ne cherchera pas à formuler de façon précise et explicite cette bijection)
     * Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable.
     * Première caractérisation des ensembles au plus dénombrables : ce sont les ensembles qui peuvent être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.
     * Propriété d'inversibilité à gauche/droite des injections, surjections. On ne soulèvera aucune question relative à l'axiome du choix.
     * Deuxième caractérisation des ensembles au plus dénombrables par injection $A \to \mathbb{N}$ ou surjection $\mathbb{N} \to A$.

   * Deuxième démonstration (arithmétique) de la dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$.
- Règles opératoires sur les ensembles dénombrables
   * Produit cartésien d'ensembles au plus dénombrables
   * Union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.
   * Exemples : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^p$, $\mathbb{Q}$.
   * Dénombrabilité du support d'une famille sommable.
- Des ensembles infinis non dénombrables
   * $\mathbb{R}$ non dénombrable (NE)
   * (HP) Théorème de Cantor : $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Énoncé des exercices de la banque CCINP

Exercice – (Banque CCINP n° 43)
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.

Exercice – (Banque CCINP n° 55)
Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\text{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Exercice – (Banque CCINP n° 112)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.