Lycée Lakanal, Sceaux
MP – Mathématiques
A. Troesch 2024/2025

Programme des colles de la semaine 2 (23/09 – 27/09)

Chapitre 2 : Cardinaux et dénombrements

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 112.

2. **Dénombrabilité**
   - Cardinaux infinis
     - ∗ Ensembles de même cardinal (équipotence)
     - ∗ Mises en garde sur le danger de trop faire confiance à son intuition. Exemple d'une inclusion stricte avec égalité des cardinaux (hôtel de Hilbert)
   - Dénombrabilité
     - ∗ Définition d'un ensemble dénombrable, au plus dénombrable.
     - ∗ Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$ par construction d'une bijection (une description visuelle rapide est suffisante, on ne cherchera pas à formuler de façon précise et explicite cette bijection)
     - ∗ Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable.
     - ∗ Première caractérisation des ensembles au plus dénombrables : ce sont les ensembles qui peuvent être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.
     - ∗ Propriété d'inversibilité à gauche/droite des injections, surjections. On ne soulèvera aucune question relative à l'axiome du choix.
     - ∗ Deuxième caractérisation des ensembles au plus dénombrables par injection $A \to \mathbb{N}$ ou surjection $\mathbb{N} \to A$.
     - ∗ Deuxième démonstration (arithmétique) de la dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$.
   - Règles opératoires sur les ensembles dénombrables
     - ∗ Produit cartésien d'ensembles au plus dénombrables
     - ∗ Union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.
     - ∗ Exemples : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^p$, $\mathbb{Q}$.
     - ∗ Dénombrabilité du support d'une famille sommable.
   - Des ensembles infinis non dénombrables
     - ∗ $\mathbb{R}$ non dénombrable (NE)
     - ∗ (HP) Théorème de Cantor : $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Chapitre 3 : Espaces vectoriels normés

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 13, 34, 37, 44, 45.

Pour le moment, n'ayant pas encore vu les comparaisons de normes, ni la compacité, seuls les exercices 34, 44 et 45 peuvent être demandés.

1. **Normes sur un espace vectoriel**
   - Définitions et propriétés élémentaires
     - ∗ Définition d'une norme (elle a été donnée avec la positivité, les étudiants doivent cependant savoir prouver que cette hypothèse est redondante). Espace vectoriel normé (abréviation autorisée e.v.n.). Le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
     - ∗ Exemple : normes euclidiennes.
     - ∗ Inégalité triangulaire généralisée, IT pour la minoration.

    * Transfert d'une norme par image réciproque par un isomorphisme.
- Normes sur des ev de dimension finie
    * Normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$
    * Normes $\|\cdot\|_{\mathcal{B},1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B},2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B},n}$ sur un ev de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B}$.
    * Les élèves doivent connaître la démarche pour montrer qu'une norme n'est pas euclidienne. Nous l'avons fait pour $\|\cdot\|_\infty$.
- Normes sur des espaces de fonctions
    * Normes sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$
    * L'espace $\mathcal{B}(A,E)$ des applications bornées. Norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{B}(A,E)$.
- Normes sur $\mathbb{K}[X]$
    * Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur les coefficients.
    * Si le point de vue est plus analytique, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$, appliquée à la fonction polynomiale associée. Variantes possibles.
- Normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou plus généralement $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).
    * Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ (pas encore de norme triple).
    * Produit scalaire $\mathrm{Tr}(A^\top B)$ associé à $\|\cdot\|_2$.
    * Notion de norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
    * Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont matricielles (preuves à connaître). Pas $norme_\infty$.
- Produits d'e.v.n.
    * Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ construites à partir des normes de chaque composante du produit cartésien.
    * La norme $\|\cdot\|_\infty$ est appelée norme produit.

2. **Topologie d'un espace vectoriel normé**
- Distances et boules
    * Distance associée à une norme. Propriétés caractéristiques d'une distance.
    * Boules ouvertes $\mathring{B}(a,r)$ (ou $B(a,r)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté), boules fermées $\overline{B}(a,r)$, sphère $S(a,r)$.
    * Représentation des boules $B(0,1)$ pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, sur $\mathbb{R}^3$.
    * Caractérisation des parties bornées par enfermement dans une boule non nécessairement centrée en 0.
    * Ensemble convexe. Les boules (ouvertes ou fermées) sont convexes.
- Voisinages, ouverts, fermés
    * Voisinages d'un point. Ensemble $\mathcal{V}(a)$ des voisinages d'un point.
    * Union et intersection de voisinages.
    * Partie ouverte de E. Partie fermée.
    * Les intervalles ouverts sont ouverts, les boules ouvertes sont ouvertes. Cas des intervalles fermés, des boules fermées.
    * Unions et intersections d'ouverts ou fermés. Les étudiants doivent pouvoir redonner un contre-exemple simple (dans $\mathbb{R}$) pour les intersections infinies d'ouverts et les unions infinies de fermés.
    * Produit cartésien d'ouverts, de fermés (pour la topologie produit).
- Intérieur, adhérence, frontière.
    * Intérieur, Définition métrique (avec des boules). Notation $\mathring{A}$.
    * Caractérisation de l'intérieur par maximalité : l'intérieur de A est le plus grand ouvert inclus dans A.
    * Intérieur d'un ouvert, double-intérieur.
    * Intérieur de la boule fermée.
    * Adhérence, définition métrique (toute boule centrée en un point adhérent à A rencontre A).

* Lien entre adhérence et intérieur par passage au complémentaire.
* Caractérisation de l'adhérence par minimalité.
* Définition de la distance d'un point à une partie. Caractérisation de l'adhérence par la distance.
* Adhérence et intérieur d'intersections ou unions finies. Contre-exemple avec les rationnels pour les inclusions problématiques.
* Frontière $\mathrm{Fr}(A)$.
* Partie A dense dans une partie B. Partie A partout dense, ou dense dans E (éfinition par l'adhérence).
* Caractérisation de la densité dans $\mathbb{R}$ par la relation d'ordre.
* Exemples : $\mathbb{Q}$ (déjà utilisé auparavant, et non redémontré, c'est du ressort de la MPSI ; la preuve n'est pas exigible pour cette colle) ; $\mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour $\|\cdot\|_\infty$ (la terminologie « polynôme caractéristique » n'a pas été donnée, et le contrôle de son degré, n'a été qu'esquissé).

3. **Convergences**
   - Suites convergentes
     * Définition, équivalence entre le point de vue métrique et le point de vue topologique.
     * Unicité de la limite.
     * Caractère borné d'une suite convergente
     * Caractérisation de la convergence dans un produit cartésien (pour la norme produit)
     * Limite d'une somme $u_n + v_n$, limite d'une multiplication par un scalaire $\lambda_n u_n$.
     * Limite d'un produit si E est muni d'un produit bilinéaire telle que la norme soit sous-multiplicative à une constante près (*admis pour le moment* même si c'est tout à fait abordable ; en effet, ce sera démontré plus tard dans une version plus générale). Exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   - Caractérisations séquentielles
     * Caractérisation séquentielle de l'adhérence
     * Caractérisation séquentielle de la densité
     * Caractérisation séquentielle des fermés

Énoncé des exercices de la banque CCINP

Exercice – (Banque CCINP n° 112)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice – (Banque CCINP n° 34)
Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Démontrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

Exercice – (Banque CCINP n° 44)
Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice – (Banque CCINP n° 45)
Les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On note $\|\cdot\|$ la norme sur E.
Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que : $\forall (x, y) \in E^2,\ \forall t \in [0, 1],\ d_A(tx + (1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$.
   Prouver que A est convexe.

Prévisions pour la semaine suivante :

- Reprise du chapitre 3, augmenté de l'étude des valeurs d'adhérence d'une suite, introduction à la compacité, comparaison de normes, topologie relative.
- Début des intégrales généralisées.