Lycée Lakanal, Sceaux 2024/2025
MP – Mathématiques
A. Troesch

Programme des colles de la semaine 3 (30/09 – 04/10)

Chapitre 3 : Espaces vectoriels normés

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 13, 34, 37, 44, 45.

1. **Normes sur un espace vectoriel**
   - Définitions et propriétés élémentaires
     * Définition d'une norme (elle a été donnée avec la positivité, les étudiants doivent cependant savoir prouver que cette hypothèse est redondante). Espace vectoriel normé (abréviation autorisée e.v.n.). Le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
     * Exemple : normes euclidiennes.
     * Inégalité triangulaire généralisée, IT pour la minoration.
     * Transfert d'une norme par image réciproque par un isomorphisme.
   - Normes sur des ev de dimension finie
     * Normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$
     * Normes $\|\cdot\|_{\mathcal{B},1}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B},2}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B},n}$ sur un ev de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B}$.
     * Les élèves doivent connaître la démarche pour montrer qu'une norme n'est pas euclidienne. Nous l'avons fait pour $\|\cdot\|_\infty$.
   - Normes sur des espaces de fonctions
     * Normes sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$
     * L'espace $\mathcal{B}(A,E)$ des applications bornées. Norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{B}(A,E)$.
   - Normes sur $\mathbb{K}[X]$
     * Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur les coefficients.
     * Si le point de vue est plus analytique, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$, appliquée à la fonction polynomiale associée. Variantes possibles.
   - Normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou plus généralement $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).
     * Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ (pas encore de norme triple).
     * Produit scalaire $\mathrm{Tr}(A^\top B)$ associé à $\|\cdot\|_2$.
     * Notion de norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
     * Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont matricielles (preuves à connaître). Pas $norme_\infty$.
   - Produits d'e.v.n.
     * Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ construites à partir des normes de chaque composante du produit cartésien.
     * La norme $\|\cdot\|_\infty$ est appelée norme produit.
2. **Topologie d'un espace vectoriel normé**
   - Distances et boules
     * Distance associée à une norme. Propriétés caractéristiques d'une distance.
     * Boules ouvertes $\mathring{B}(a,r)$ (ou $B(a,r)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté), boules fermées $\overline{B}(a,r)$, sphère $S(a,r)$.
     * Représentation des boules $B(0,1)$ pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, sur $\mathbb{R}^3$.
     * Caractérisation des parties bornées par enfermement dans une boule non nécessairement centrée en 0.
     * Ensemble convexe. Les boules (ouvertes ou fermées) sont convexes.

- Voisinages, ouverts, fermés
  - Voisinages d'un point. Ensemble $\mathcal{V}(a)$ des voisinages d'un point.
  - Union et intersection de voisinages.
  - Partie ouverte de E. Partie fermée.
  - Les intervalles ouverts sont ouverts, les boules ouvertes sont ouvertes. Cas des intervalles fermés, des boules fermées.
  - Unions et intersections d'ouverts ou fermés. Les étudiants doivent pouvoir redonner un contre-exemple simple (dans $\mathbb{R}$) pour les intersections infinies d'ouverts et les unions infinies de fermés.
  - Produit cartésien d'ouverts, de fermés (pour la topologie produit).
- Intérieur, adhérence, frontière.
  - Intérieur, Définition métrique (avec des boules). Notation $\mathring{A}$.
  - Caractérisation de l'intérieur par maximalité : l'intérieur de A est le plus grand ouvert inclus dans A.
  - Intérieur d'un ouvert, double-intérieur.
  - Intérieur de la boule fermée.
  - Adhérence, définition métrique (toute boule centrée en un point adhérent à A rencontre A).
  - Lien entre adhérence et intérieur par passage au complémentaire.
  - Caractérisation de l'adhérence par minimalité.
  - Définition de la distance d'un point à une partie. Caractérisation de l'adhérence par la distance.
  - Adhérence et intérieur d'intersections ou unions finies. Contre-exemple avec les rationnels pour les inclusions problématiques.
  - Frontière $\mathrm{Fr}(A)$.
  - Partie A dense dans une partie B. Partie A partout dense, ou dense dans E (éfinition par l'adhérence).
  - Caractérisation de la densité dans $\mathbb{R}$ par la relation d'ordre.
  - Exemples : $\mathbb{Q}$ (déjà utilisé auparavant, et non redémontré, c'est du ressort de la MPSI ; la preuve n'est pas exigible pour cette colle) ; $\mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour $\|\cdot\|_\infty$ (la terminologie « polynôme caractéristique » n'a pas été donnée, et le contrôle de son degré, n'a été qu'esquissé).

3. **Convergences**
   - Suites convergentes
     - Définition, équivalence entre le point de vue métrique et le point de vue topologique.
     - Unicité de la limite.
     - Caractère borné d'une suite convergente
     - Caractérisation de la convergence dans un produit cartésien (pour la norme produit)
     - Limite d'une somme $u_n + v_n$, limite d'une multiplication par un scalaire $\lambda_n u_n$.
     - Limite d'un produit si E est muni d'un produit bilinéaire telle que la norme soit sous-multiplicative à une constante près (*admis pour le moment* même si c'est tout à fait abordable ; en effet, ce sera démontré plus tard dans une version plus générale). Exemples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   - Caractérisations séquentielles
     - Caractérisation séquentielle de l'adhérence
     - Caractérisation séquentielle de la densité
     - Caractérisation séquentielle des fermés

4. **Valeurs d'adhérence et compacité**
   - Valeurs d'adhérence d'une suite
     - Suites extraites.

    * Théorème de convergence des suites extraites (d'une suite convergente)
    * Théorème de convergence par les suites extraites couvrantes (démonstration et même énoncé général HP, à savoir faire dans des cas simples).
    * Valeurs d'adhérences
    * Ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite convergente. Réciproque fausse.
    * Caractérisation d'une valeur d'adhérence a par accumulation infinie de termes u_n au voisinage de a
- Bolzano-Weierstrass réel.
    * Rappel du théorème de BW réel. La démonstration par dichotomie a été revue. Elle est exigible pour la colle.
    * Dans $\mathbb{R}$: valeur d'adhérence infinie. Caractérisation par non majoration.
    * Caractérisation de la convergence par le nombre de valeurs d'adhérences dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- Sous-ensembles compacts
    * Définition d'une partie compacte d'un e.v.n.
    * Un compact est fermé borné, réciproque fausse (on n'a pas donné d'exemple en cours ; les étudiants ont le théorème de Riesz en DM, dont ils peuvent évoquer le résultat ; la preuve n'est pas exigible en colle)
    * Caractérisation de la convergence dans un compact par le nombre de valeurs d'adhérence.
    * Produit (fini) de compacts. Extractions successives
    * BW en dimension finie, pour une norme $\|\cdot\|_\infty$ (en se ramenant par isomorphisme à un produit cartésient)
    * Le théorème de BW pourra être admis pour le moment en dimension finie pour les autres normes (le mentionner explicitement aux étudiants)
    * Pour une norme $\|\cdot\|_\infty$, les fermés bornés en dimension finie sont compacts. Cas d'une boule fermé.
    * Tout comme BW, en admettant l'équivalence des normes en dimension finie, on pourra utiliser ce résultat pour d'autres normes.

5. **Comparaisons de normes**
    - Domination de normes
        * Domination d'une norme par une autre
        * Caractérisation par l'image de la boule fermée unité, ou par l'image de la sphère unité.
        * Transitivité
        * Caractérisation de la domination par la comparaison des voisinages ; des ouverts. Seul le sens direct est exigible (N_1 dominé par N_2 implique $\mathcal{V}_1(a) \subset \mathcal{V}_2(a)$).
        * Comparaison des propriétés de convergence.
    - Normes équivalentes
        * Définition
        * Équivalence des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur un produit cartésien fini.
        * On pourra admettre, si nécessaire, en le rappelant aux étudiants, que les normes d'un espace de dimension finie sont équivalentes.

Chapitre 4 : Intégrales généralisées

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 25, 26, 27, 28

1. **Propriétés générales**
    - Fonctions continues par morceaux
        * Rappel de la définition sur un segment
        * Extension à un intervalle quelconque

    - Sauf nécessité d'hypothèses plus forte, toute la théorie des intégrales généralisées est faite dans le cadre des fonctions c.p.m.
- Définitions et propriétés élémentaires
    - Intégrale généralisée (terminologie au programme) ou impropre (terminologie absente du programme) : définition sur un intervalle $[a, b[$, par passage à la limite sur la borne. Intégrale convergente, divergente. Valeur.
    - Intégrale faussement généralisée, ou faussement impropre.
    - Linéarité, positivité, croissance, stricte positivité.
    - Chasles
    - Intégrale fonction de sa borne non impropre. Dérivation.
- Intégrales de référence
    - En $+\infty$: exponentielle et Riemann
    - Adaptation en $-\infty$ (on l'a admis sans refaire les calculs)
    - En $a \in \mathbb{R}$: Riemann
    - Les propriétés de convergence des intégrales de Bertrand ont été évoquées, mais sont HP.
- Théorèmes de comparaison pour les fonctions positives
    - CNS de convergence quand $f \geqslant 0$ par majoration
    - Théorème de comparaison par inégalité
    - Théorème de comparaison par domination ou négligeabilité
    - Théorème de comparaison par équivalences
- Extension des définitions au cas d'un intervalle $]a, b[$
    - Définition, indépendance vis-à-vis du point intermédiate de séparation. Chasles.
    - Adaptation des résultats liés à la linéarité, positivité, croissance, stricte positivité.
    -
- Intégrabilité
    - Fonction intégrable sur un intervalle I. On pourra aussi parler de convergence absolue. Intégrabilité en une borne
    - CVA implique CV
    - Valeur d'une intégrale de fonction positive mais non intégrable
    - Validité dans $\overline{\mathbb{R}}$ des manipulations de linéarité positive, et des intégrations d'inégalités.
    - Le programme stipule qu'on peut dans ce cadre ($f \geqslant 0$) mener des calculs sans justification préalable de convergence, et un résultat fini ou une majoration finie vaut preuve de convergence.
    - Adaptation des théorèmes de comparaison pour l'intégrabilité
    - Espace $L^1(I, \mathbb{K})$. Inégalité triangluaire
    - Stricte positivité, norme $\|\cdot\|_1$ sur $L^1_c(I, \mathbb{K})$ (intégrables continues).
- Bilan méthodologique pour l'étude de la CV d'une intégrale généralisée.

- *Pour l'instant, seul l'exercice 28 est exigible*
- *ON NE DONNERA PAS ENCORE D'EXERCICES NON PRÉPARÉS sur ce chapitre : Uniquement exercice CCINP ou question de cours.*

Énoncé des exercices de la banque CCINP

ATTENTION, l'énoncé donné la semaine dernière pour l'exercice 34 n'était pas à jour, je l'ai rectifié pour cette semaine.

Exercice – (Banque CCINP n° 13)

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $|| \, ||_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ de E par : $||P||_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
   (a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] \, / \, ||P||_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
   (b) Calculer $||X^n - X^m||_1$ pour m et n entiers naturels distincts.
   $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

Exercice – (Banque CCINP n° 34)
Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Soit B une autre partie non vide de E. Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

Exercice – (Banque CCINP n° 37)
On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall \, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice – (Banque CCINP n° 44)
Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice – (Banque CCINP n° 45)
Les questions 1. et 2. sont indépendantes.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On note $\|\cdot\|$ la norme sur E.
Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que : $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall t \in [0,1]$, $d_A(tx + (1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$.
   Prouver que A est convexe.

Exercice – (Banque CCINP n° 28)
N.B. : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Prévisions pour la semaine suivante :

- Reprise de la fin du chapitre 3 (valeurs d'adhérence, compacité, comparaison de normes)
- Intégrales généralisées en entier (sans intégrale à paramètres, mais avec TCD séquentiel)
- Peut-être début de la continuité sur des e.v.n.