

Programme des colles de la semaine 4 (07/10 – 11/10)

Note importante

Les étudiants étant un peu perdus face à l'ampleur de leur cours, j'ai pu constater (par moi-même et par le retour des colleurs) que les apprentissages n'étaient pas toujours assez précis, car trop dispersés et pas assez ciblés sur les points les plus importants. J'ai donc décidé de donner une liste d'une dizaine de questions de cours plus ciblées, couvrant à peu près la totalité du programme, mais permettant de se focaliser sur les points les plus importants. Les colleurs sont libres de poser des questions en dehors de cette liste, mais doivent alors être plus indulgents.

Chapitre 3 : Espaces vectoriels normés

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 13 (sans question 4a), 34, 37 (sans question 1c), 44, 45.

4. Valeurs d'adhérence et compacité

- Valeurs d'adhérence d'une suite
 - * Suites extraites.
 - * Théorème de convergence des suites extraites (d'une suite convergente)
 - * Théorème de convergence par les suites extraites couvrantes (démonstration et même énoncé général HP, à savoir faire dans des cas simples).
 - * Valeurs d'adhérences
 - * Ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite convergente. Réciproque fausse.
 - * Caractérisation d'une valeur d'adhérence a par accumulation infinie de termes u_n au voisinage de a
- Bolzano-Weierstrass réel.
 - * Rappel du théorème de BW réel. La démonstration par dichotomie a été revue. Elle est exigible pour la colle.
 - * Dans $\mathbb{R}$: valeur d'adhérence infinie. Caractérisation par non majoration.
 - * Caractérisation de la convergence par le nombre de valeurs d'adhérences dans $\overline{\mathbb{R}}$.
- Sous-ensembles compacts
 - * Définition d'une partie compacte d'un e.v.n.
 - * Un compact est fermé borné, réciproque fausse (on n'a pas donné d'exemple en cours ; les étudiants ont le théorème de Riesz en DM, dont ils peuvent évoquer le résultat ; la preuve n'est pas exigible en colle)
 - * Caractérisation de la convergence dans un compact par le nombre de valeurs d'adhérence.
 - * Produit (fini) de compacts. Extractions successives
 - * BW en dimension finie, pour une norme $\|\cdot\|_\infty$ (en se ramenant par isomorphisme à un produit cartésien)
 - * Le théorème de BW pourra être admis pour le moment en dimension finie pour les autres normes (le mentionner explicitement aux étudiants)
 - * Pour une norme $\|\cdot\|_\infty$, les fermés bornés en dimension finie sont compacts. Cas d'une boule fermée.
 - * Tout comme BW, en admettant l'équivalence des normes en dimension finie, on pourra utiliser ce résultat pour d'autres normes.

5. Comparaisons de normes

- Domination de normes
 - * Domination d'une norme par une autre
 - * Caractérisation par l'image de la boule fermée unité, ou par l'image de la sphère unité.
 - * Transitivité
 - * Caractérisation de la domination par la comparaison des voisinages ; des ouverts. Seul le sens direct est exigible (N_1 dominé par N_2 implique $\mathcal{V}_1(a) \subset \mathcal{V}_2(a)$).
 - * Comparaison des propriétés de convergence.
- Normes équivalentes
 - * Définition
 - * Équivalence des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur un produit cartésien fini.
 - * On pourra admettre, si nécessaire, en le rappelant aux étudiants, que les normes d'un espace de dimension finie sont équivalentes.

Chapitre 4 : Intégrales généralisées

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 25, 26, 27 (sans les questions 2 et 3), 28

1. Propriétés générales

- Fonctions continues par morceaux
 - * Rappel de la définition sur un segment
 - * Extension à un intervalle quelconque
 - * Sauf nécessité d'hypothèses plus forte, toute la théorie des intégrales généralisées est faite dans le cadre des fonctions c.p.m.
- Définitions et propriétés élémentaires
 - * Intégrale généralisée (terminologie au programme) ou impropre (terminologie absente du programme) : définition sur un intervalle $[a, b[$, par passage à la limite sur la borne. Intégrale convergente, divergente. Valeur.
 - * Intégrale faussement généralisée, ou faussement impropre.
 - * Linéarité, positivité, croissance, stricte positivité.
 - * Chasles
 - * Intégrale fonction de sa borne non impropre. Dérivation.
- Intégrales de référence
 - * En $+\infty$: exponentielle et Riemann
 - * Adaptation en $-\infty$ (on l'a admis sans refaire les calculs)
 - * En $a \in \mathbb{R}$: Riemann
 - * Les propriétés de convergence des intégrales de Bertrand ont été évoquées, mais sont HP.
- Théorèmes de comparaison pour les fonctions positives
 - * CNS de convergence quand $f \geq 0$ par majoration
 - * Théorème de comparaison par inégalité
 - * Théorème de comparaison par domination ou négligeabilité
 - * Théorème de comparaison par équivalences
- Extension des définitions au cas d'un intervalle $]a, b[$
 - * Définition, indépendance vis-à-vis du point intermédiaire de séparation. Chasles.
 - * Adaptation des résultats liés à la linéarité, positivité, croissance, stricte positivité.
 - *
- Intégrabilité
 - * Fonction intégrable sur un intervalle I . On pourra aussi parler de convergence absolue.
 - Intégrabilité en une borne

- * CVA implique CV
- * Valeur d'une intégrale de fonction positive mais non intégrable
- * Validité dans $\mathbb{R}$ des manipulations de linéarité positive, et des intégrations d'inégalités.
- * Le programme stipule qu'on peut dans ce cadre ($f \geq 0$) mener des calculs sans justification préalable de convergence, et un résultat fini ou une majoration finie vaut preuve de convergence.
- * Adaptation des théorèmes de comparaison pour l'intégrabilité
- * Espace $L^1(I, \mathbb{K})$. Inégalité triangulaire
- * Stricte positivité, norme $\|\cdot\|_1$ sur $L_c^1(I, \mathbb{K})$ (intégrables continues).
- Bilan méthodologique pour l'étude de la CV d'une intégrale généralisée.

2. Méthodes calculatoires

- Changement de variables
 - * Formule de variable, pour φ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante. Adaptation pour φ strictement décroissante. Cela donne aussi un outil de comparaison pour l'étude de la nature
 - * Exemple important : intégrales de Bertrand de paramètre $(1, \beta)$.
 - * (HP, mais bon à connaître) Propriétés de convergence des intégrales de Bertrand, par l'exemple précédent, ou par comparaison à une intégrale de Riemann dans les autres cas.
- Intégration par parties
 - * Extension de la notation crochet en cas d'existence des limites de f aux bornes
 - * Formule de changement de variables lorsque uv admet des limites aux bornes (après avoir vérifié cette hypothèse, on pourra écrire l'IPP directement avec les bornes impropres). Cela donne aussi un outil de comparaison de la nature des intégrales
 - * Si uv n'a pas de limite aux bornes, se ramener à un segment par l'étude des intégrales partielles.
 - * Exemples importants : nature de intégrale de Dirichlet, fonction Γ et relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Ces exemples sont à savoir refaire.

3. Études asymptotiques

- Intégration des relations de comparaison
 - * Intégration des relations de comparaison pour les intégrales restes, dans le cas convergent.
 - * Intégration des relations de comparaison pour les intégrales partielles dans le cas divergent.
 - * Dans les deux cas, il est attendu des étudiants qu'ils sachent énoncer (et vérifier) avec précision les hypothèses des deux théorèmes.
 - * *Les résultats similaires pour les séries n'ont pas encore été vus.*
- Théorème de convergence dominée (TCD) séquentiel
 - * Énoncé du TCD. Les hypothèses de régularité sont toujours la c.p.m. *Le TCD est admis*
 - * Il est attendu des étudiants qu'ils sachent énoncer (et vérifier) avec précision les hypothèses du TCD. Le programme stipule de ne pas s'attarder sur les justifications des hypothèses de c.p.m.
 - * *La version continue du TCD n'a pas encore été vue, ni ses applications à l'étude des intégrales à paramètres*

Liste des questions de cours à préparer

Cette liste n'empêche par le colleur, d'il le souhaite, d'évaluer votre connaissance du reste du cours, notamment des énoncés et définitions qui doivent être connus de façon très précise

1. Théorème de Bolzano-Weierstrass réel, avec sa preuve par dichotomie.
2. Définition d'une partie compacte, un compact est fermé borné.
3. Produit cartésien de compacts. Démonstration par extractions successives (on pourra se contenter de faire la preuve pour le produit de 2 compacts)

4. Définition de la domination des normes, de l'équivalence de normes. Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur un produit cartésien sont équivalentes.
5. Définition d'une intégrale généralisée sur $[a, b[$ ou $]a, b]$. Intégrales de Riemann en $+\infty$, en b : définitions et propriétés de convergence.
6. Théorèmes de comparaison pour les fonctions positives : $\leq$, puis O , o et $\sim$. On présentera la preuve pour $\leq$ et O .
7. Définition d'une fonction intégrable sur un intervalle I . L'intégrabilité implique la convergence de l'intégrale.
8. Énoncé de la formule de changement de variables et de la formule d'IPP. Relation sur $\Gamma(x)$ et calcul de $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
9. Théorèmes d'intégration des relations de comparaison. Démonstration dans le cas divergent pour o .
10. Énoncé précis du TCD, et application au calcul de la limite de $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$.

Énoncé des exercices de la banque CCINP

Exercice – (Banque CCINP n° 13) - extrait – Question 4(a) supprimée

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ de E par : $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^n |a_i|$.
(b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n entiers naturels distincts.
 $S(0, 1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

Exercice – (Banque CCINP n° 34)

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé E .

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A , en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E , alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E .
4. Soit B une autre partie non vide de E . Montrer que $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$

Exercice – (Banque CCINP n° 37 - extrait) – Question 1c supprimée

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E, N_\infty(f) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E .
(b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E , $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice – (Banque CCINP n° 44)

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E .

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

- (b) Montrer que : $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- Remarque** : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
- (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice – (Banque CCINP n° 45)

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. On note $\|\cdot\|$ la norme sur E .

Soit A une partie non vide de E .

On note $\overline{A}$ l'adhérence de A .

- (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
- (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
- On pose : $\forall x \in E, d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.
 - Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}$.
 - On suppose que A est fermée et que : $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1-t)y) \leq td_A(x) + (1-t)d_A(y)$.
Prouver que A est convexe.

Exercice – (Banque CCINP n° 25)

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice – (Banque CCINP n° 26)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$.

- Justifier que I_n est bien définie.
- (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

Exercice – (Banque CCINP n° 27 - extrait) – Questions 2 et 3 supprimées

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2 x^2}$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

- Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.
- Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice – (Banque CCINP n° 28)

N.B. : les deux questions sont indépendantes.

- La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
- Soit a un réel strictement positif.
La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Prévisions pour la semaine suivante :

- Reprise du chapitre sur les intégrales généralisées
- Continuité sur des e.v.n.
- Peut-être un peu de connexité par arcs