Programme des colles de la semaine 5 (14/10 – 18/10)

Chapitre 4 : Intégrales généralisées

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 25, 26, 27 (sans les questions 2 et 3), 28

1. **Propriétés générales**
   - Fonctions continues par morceaux
     - Rappel de la définition sur un segment
     - Extension à un intervalle quelconque
     - Sauf nécessité d'hypothèses plus forte, toute la théorie des intégrales généralisées est faite dans le cadre des fonctions c.p.m.
   - Définitions et propriétés élémentaires
     - Intégrale généralisée (terminologie au programme) ou impropre (terminologie absente du programme) : définition sur un intervalle $[a, b[$, par passage à la limite sur la borne. Intégrale convergente, divergente. Valeur.
     - Intégrale faussement généralisée, ou faussement impropre.
     - Linéarité, positivité, croissance, stricte positivité.
     - Chasles
     - Intégrale fonction de sa borne non impropre. Dérivation.
   - Intégrales de référence
     - En $+\infty$: exponentielle et Riemann
     - Adaptation en $-\infty$ (on l'a admis sans refaire les calculs)
     - En $a \in \mathbb{R}$: Riemann
     - Les propriétés de convergence des intégrales de Bertrand ont été évoquées, mais sont HP.
   - Théorèmes de comparaison pour les fonctions positives
     - CNS de convergence quand $f \geqslant 0$ par majoration
     - Théorème de comparaison par inégalité
     - Théorème de comparaison par domination ou négligeabilité
     - Théorème de comparaison par équivalences
   - Extension des définitions au cas d'un intervalle $]a, b[$
     - Définition, indépendance vis-à-vis du point intermédiate de séparation. Chasles.
     - Adaptation des résultats liés à la linéarité, positivité, croissance, stricte positivité.
     -
   - Intégrabilité
     - Fonction intégrable sur un intervalle I. On pourra aussi parler de convergence absolue. Intégrabilité en une borne
     - CVA implique CV
     - Valeur d'une intégrale de fonction positive mais non intégrable
     - Validité dans $\overline{\mathbb{R}}$ des manipulations de linéarité positive, et des intégrations d'inégalités.
     - Le programme stipule qu'on peut dans ce cadre ($f \geqslant 0$) mener des calculs sans justification préalable de convergence, et un résultat fini ou une majoration finie vaut preuve de convergence.
     - Adaptation des théorèmes de comparaison pour l'intégrabilité
     - Espace $L^1(I, \mathbb{K})$. Inégalité triangluaire

    * Stricte positivité, norme $\|\cdot\|_1$ sur $L^1_c(I,\mathbb{K})$ (intégrables continues).
  - Bilan méthodologique pour l'étude de la CV d'une intégrale généralisée.

2. **Méthodes calculatoires**
  - Changement de variables
    * Formule de variable, pour φ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante. Adaptation pour φ strictement décroissante. Cela donne aussi un outil de comparaison pour l'étude de la nature
    * Exemple important : intégrales de Bertrand de paramètre $(1,\beta)$.
    * (HP, mais bon à connaître) Propriétés de convergence des intégrales de Bertrand, par l'exemple précédent, ou par comparaison à une intégrale de Riemann dans les autres cas.
  - Intégration par parties
    * Extension de la notation crochet en cas d'existence des limites de f aux bornes
    * Formule de changement de variables lorsque uv admet des limites aux bornes (après avoir vérifié cette hypothèse, on pourra écrire l'IPP directement avec les bornes impropres). Cela donne aussi un outil de comparaison de la nature des intégrales
    * Si uv n'a pas de limite aux bornes, se ramener à un segment par l'étude des intégrales partielles.
    * Exemples importants : nature de intégrale de Dirichlet, fonction Γ et relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Ces exemples sont à savoir refaire.

3. **Études asymptotiques**
  - Intégration des relations de comparaison
    * Intégration des relations de comparaison pour les intégrales restes, dans le cas convergent.
    * Intégration des relations de comparaison pour les intégrales partielles dans le cas divergent.
    * Dans les deux cas, il est attendu des étudiants qu'ils sachent énoncer (et vérifier) avec précision les hypothèses des deux théorèmes.
    * *Les résultats similaires pour les séries n'ont pas encore été vus.*
  - Théorème de convergence dominée (TCD) séquentiel
    * Énoncé du TCD. Les hypothèses de régularité sont toujours la c.p.m. *Le TCD est admis*
    * Il est attendu des étudiants qu'ils sachent énoncer (et vérifier) avec précision les hypothèses du TCD. Le programme stipule de ne pas s'attarder sur les justifications des hypothèses de c.p.m.
    * *La version continue du TCD n'a pas encore été vue, ni ses applications à l'étude des intégrales à paramètres*

Chapitre 5 : Continuité sur un e.v.n.

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 1, 13, 35, 36, 37, 38

Pour le moment, seuls les exercices 1, 13, 35, 37 sont abordables

PAS ENCORE D'EXERCICES *traités en cours. Les points qui suivent ne pourront cette semaine que faire l'objet de questions de cours, ou d'exercices de la base CCINP.*

1. **Limites dans un e.v.n.**

   Les fonctions sont définies sur une partie A d'une e.v.n. E, et à valeurs dans un e.v.n. F.
  - Limites dans F en $a \in \overline{A}$
    * Définition métrique. Réexpression en terme de boules (par convention, si $X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = f(X \cap A)$)
    * Indifférence de la nature stricte ou large dans les inégalités de la définition
    * En cas d'existence, valeur de la limite lorsque a est dans le domaine de f.
  - Si $F = \mathbb{R}$, limites infinies en $a \in \overline{A}$

  - $*$ Définition par inégalités. Traduction par images directe de boules.
- Limites en ∞.
  - $*$ Limites en $\pm\infty$ lorsque $E = \mathbb{R}$, F quelconque.
  - $*$ Limite lorsque $\|x\| \to +\infty$ (qu'on notera simplement $x \to \infty$).
- Point de vue topologique
  - $*$ Voisinages (rappels), voisinage de $+\infty$, $-\infty$ (si $E = \mathbb{R}$), voisinage de ∞ (E quelconque). Intersection finie de voisinages.
  - $*$ Caractérisation topologique des limites (par voisinages), incluant tous les cas.
  - $*$ Caractérisations mixtes (topologique sur E, métrique sur F ou l'inverse).
  - $*$ Unicité de la limite
  - $*$ Caractérisation séquentielle.
  - $*$ Coïncidence de deux fonctions sur une partie X. Comparaison des limites en a (existence et valeur) lorsque f et g coïncident sur un voisinage de a.
- Opérations sur les limites
  - $*$ Combinaison linéaire
  - $*$ Composée
  - $*$ Limite d'un produit lorsque E est muni d'un produit bilinéaire vérifiant $\|xy\| \leqslant k\|x\| \cdot \|y\|$.
- Limites partielles sur une partie X de E ($\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x)$).
  - $*$ Définition
  - $*$ Caractérisation de la limite par les limites partielles sur une famille finie localement couvrante
  - $*$ Cas des limites à gauche et droite quand $E = \mathbb{R}$. Exemple dans $\mathbb{R}^2$ pour une fonction définie par morceaux sur 2 demi-plans.

2. **Continuité**
- Continuité en un point

  Les fonctions sont définies sur une partie A d'une e.v.n. E, et à valeurs dans un e.v.n. F.
  - $*$ Définition, expression métrique, expression topologique (avec voisinages)
  - $*$ Continuité sur une partie X de A.
  - $*$ Comparaison de la continuité de f et g en a en cas de coïncidence sur un voisinage de a. Comparaison globale en cas de coïncidence sur un ouvert U.
  - $*$ Caractérisation séquentielle
- Opérations sur les fonctions continues
  - $*$ Combinaisons linéaires, produits (avec les conditions idoines), composition.
  - $*$ Caractérisation par les coordonnées de la continuité d'une application à valeurs dans un produit cartésien.
- Continuité uniforme, fonctions lipschitziennes
  - $*$ Continuité uniforme, u.c. implique $\mathcal{C}^0$.
  - $*$ Critère séquentiel, avec la petite amélioration suivante :

    « non u.c. $\Longrightarrow\ \exists \varepsilon > 0,\ \exists (u_n), (v_n),\quad u_n - v_n \longrightarrow 0$ et $\|f(u_n) - f(v_n)\|_F \geqslant \varepsilon$ », qui sera bien utile pour Heine.
  - $*$ Application lipschitzienne, lipschitzien implique u.c.
- Exemples importants de fonctions continues

  Pour toutes ces fonctions, on montre en fait leur caractère lipschitzien, et donc aussi u.c.
  - $*$ La norme est continue
  - $*$ La distance $d(\cdot, A)$ à une partie A non vide est continue
  - $*$ La projection sur un facteur d'un produit cartésien est continue.
- Prolongements
  - $*$ Prolongement par continuité en un point $a \in \overline{A}$, en un nombre fini de points.

- * Fonctions continues coïncidant sur une partie dense. Sous réserve d'existence, unicité du prolongement continu à A pour f continue sur B dense dans A.

3. **Continuité et topologie**
   - Images réciproques
     - * Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une fonction continue.

       Seul le sens direct est au programme. Le fait que cela caractérise la continuité n'est pas au programme et n'a pas été évoqué.
     - * Exemples pour déterminer la nature de zones de $\mathbb{R}^2$ définies par des inéquations.
     - * $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Fonction continue sur un compact
     - * Image d'un compact par une fonction continue :théorème de compacité
     - * Cas $f : K \subset E \to \mathbb{R}$: théorème des bornes atteintes. Cas particulier $K = [a, b] \subset \mathbb{R}$.
     - * Utilisation du théorème de compacité pour justifier l'existence d'extrema globaux de fonctions de plusieurs variables, y compris lorsque le domaine n'est pas borné, en étudiant la limite quand $\|X\| \to \infty$.

Liste des questions de cours à préparer

Cette liste n'empêche par le colleur, d'il le souhaite, d'évaluer votre connaissance du reste du cours, notamment des énoncés et définitions qui doivent être connus de façon très précise

1. Énoncé de la formule de changement de variables et de la formule d'IPP. Relation sur $\Gamma(x)$ et calcul de $\Gamma(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Théorèmes d'intégration des relations de comparaison. Démonstration dans le cas divergent pour o.
3. Énoncé précis du TCD, et application au calcul de la limite de $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$.
4. Définition de la limite ℓ de f en a, quand $a \in \overline{A}$ et $b \in F$, puis quand $a = \infty$ et $b \in F$. Caractérisation topologique par les voisinages, avec démonstration dans le cas où $a \in \overline{A}$ et $b \in F$. Application à la limite d'une composée.
5. Caractérisation séquentielle de la limite. Application aux propriétés opératoires (limite d'une combinaison linéaire, d'un produit avec hypothèses idoines)
6. Limites partielles, caractérisation de la limite par les limites partielles sur un nombre fini de domaines couvrants.
7. Continuité uniforme : définition, critère séquentiel (avec preuve), théorème de Heine (avec preuve).
8. Continuité de la norme et de la distance à une partie non vide A.
9. Image réciproque de fermés et d'ouverts.
10. Théorème de compacité et théorème des bornes atteintes.

Énoncé des exercices de la banque CCINP à préparer

Exercice – (Banque CCINP n° 25)

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice – (Banque CCINP n° 26)

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^n} \mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. (a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

Exercice – (Banque CCINP n° 27 - extrait) – *Questions 2 et 3 supprimées*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice – (Banque CCINP n° 28)
N.B. : les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Exercice – (Banque CCINP n° 1)
On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \qquad \text{et} \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

1. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
   (a) Soit $u : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0). \end{cases}$
   Prouver que u est une application continue sur E.
   (b) On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
3. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.
   Soit $c : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1. \end{cases}$
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.
   (b) On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. On note $\overline{F}$ l'adhérence de F.
   Prouver que $c \in \overline{F}$.
   F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_1$?

Exercice – (Banque CCINP n° 13)

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.

3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ de E par : $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
   (a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
   (b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n entiers naturels distincts.
   $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

Exercice – **(Banque CCINP n° 35)**
E et F désignent deux espaces vectoriels normés.
On note $\|\cdot\|_E$ (respectivement $\|\cdot\|_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E.
   On considère les propositions suivantes :

   P1. f est continue en a.
   P2. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
2. Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F.
   Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Exercice – **(Banque CCINP n° 37)**
On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Prévisions pour la semaine suivante, c'est-à-dire au retour de vacances :

- Continuité sur les e.v.n. avec les exercices cette fois
- Connexité par arcs, applications linéaires continues, équivalence des normes en dimension finie
- Révisions sur les séries numériques et familles sommables, et peut-être les compléments sur les sommations de relations de comparaison, et sur les séries dans un e.v.n. de dimension finie.