Programme des colles de la semaine 6 (04/11 – 08/11)

Chapitre 5 : Continuité sur un e.v.n.

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 1, 13, 35, 36, 37, 38

1. **Limites dans un e.v.n.**

   Les fonctions sont définies sur une partie A d'une e.v.n. E, et à valeurs dans un e.v.n. F.
   - Limites dans F en $a \in \overline{A}$
     - Définition métrique. Réexpression en terme de boules (par convention, si $X \in \mathcal{P}(E)$, $f(X) = f(X \cap A)$)
     - Indifférence de la nature stricte ou large dans les inégalités de la définition
     - En cas d'existence, valeur de la limite lorsque a est dans le domaine de f.
   - Si $F = \mathbb{R}$, limites infinies en $a \in \overline{A}$
     - Définition par inégalités. Traduction par images directe de boules.
   - Limites en ∞.
     - Limites en $\pm\infty$ lorsque $E = \mathbb{R}$, F quelconque.
     - Limite lorsque $\|x\| \to +\infty$ (qu'on notera simplement $x \to \infty$).
   - Point de vue topologique
     - Voisinages (rappels), voisinage de $+\infty$, $-\infty$ (si $E = \mathbb{R}$), voisinage de ∞ (E quelconque). Intersection finie de voisinages.
     - Caractérisation topologique des limites (par voisinages), incluant tous les cas.
     - Caractérisations mixtes (topologique sur E, métrique sur F ou l'inverse).
     - Unicité de la limite
     - Caractérisation séquentielle.
     - Coïncidence de deux fonctions sur une partie X. Comparaison des limites en a (existence et valeur) lorsque f et g coïncident sur un voisinage de a.
   - Opérations sur les limites
     - Combinaison linéaire
     - Composée
     - Limite d'un produit lorsque E est muni d'un produit bilinéaire vérifiant $\|xy\| \leqslant k\|x\| \cdot \|y\|$.
   - Limites partielles sur une partie X de E ($\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in X}} f(x)$).
     - Définition
     - Caractérisation de la limite par les limites partielles sur une famille finie localement couvrante
     - Cas des limites à gauche et droite quand $E = \mathbb{R}$. Exemple dans $\mathbb{R}^2$ pour une fonction définie par morceaux sur 2 demi-plans.

2. **Continuité**
   - Continuité en un point

     Les fonctions sont définies sur une partie A d'une e.v.n. E, et à valeurs dans un e.v.n. F.
     - Définition, expression métrique, expression topologique (avec voisinages)
     - Continuité sur une partie X de A.
     - Comparaison de la continuité de f et g en a en cas de coïncidence sur un voisinage de a. Comparaison globale en cas de coïncidence sur un ouvert U.

* Caractérisation séquentielle
- Opérations sur les fonctions continues
  * Combinaisons linéaires, produits (avec les conditions idoines), composition.
  * Caractérisation par les coordonnées de la continuité d'une application à valeurs dans un produit cartésien.
- Continuité uniforme, fonctions lipschitziennes
  * Continuité uniforme, u.c. implique $\mathcal{C}^0$.
  * Critère séquentiel, avec la petite amélioration suivante :

    « non u.c. $\Longrightarrow \exists\varepsilon > 0,\ \exists(u_n),(v_n),\ \ u_n - v_n \longrightarrow 0$ et $\|f(u_n) - f(v_n)\|_F \geqslant \varepsilon$ », qui sera bien utile pour Heine.
  * Application lipschitzienne, lipschitzien implique u.c.
- Exemples importants de fonctions continues

  Pour toutes ces fonctions, on montre en fait leur caractère lipschitzien, et donc aussi u.c.
  * La norme est continue
  * La distance $d(\cdot, A)$ à une partie A non vide est continue
  * La projection sur un facteur d'un produit cartésien est continue.
- Prolongements
  * Prolongement par continuité en un point $a \in \overline{A}$, en un nombre fini de points.
  * Fonctions continues coïncidant sur une partie dense. Sous réserve d'existence, unicité du prolongement continu à A pour f continue sur B dense dans A.

3. **Continuité et topologie**
- Images réciproques
  * Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une fonction continue.

    Seul le sens direct est au programme. Le fait que cela caractérise la continuité n'est pas au programme et n'a pas été évoqué.
  * Exemples pour déterminer la nature de zones de $\mathbb{R}^2$ définies par des inéquations.
  * $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Fonction continue sur un compact
  * Image d'un compact par une fonction continue :théorème de compacité
  * Cas $f : K \subset E \to \mathbb{R}$: théorème des bornes atteintes. Cas particulier $K = [a,b] \subset \mathbb{R}$.
  * Utilisation du théorème de compacité pour justifier l'existence d'extrema globaux de fonctions de plusieurs variables, y compris lorsque le domaine n'est pas borné, en étudiant la limite quand $\|X\| \to \infty$.
  * Théorème de Heine

ENCORE PEU D'EXERCICES traités en cours sur les notions qui suivent.

4. **Connexité par arcs**
- Parties connexes par arcs
  * Définition d'un arc continu, relation « être relié par un arc », définition des composants connexes par arcs.
  * Partie connexe par arcs, exemples importants ($\mathbb{C}^*$, $S(A,r)$ en dimension (réelle) supérieure à 2).
  * Parties étoilées. Parties convexes. Connexité des boules et des sev.
- Image continue d'une partie connexe par arcs
  * Image d'un connexe par arcs par une fonction continue.
  * Exemple : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

5. **Continuité des applications linéaires**
- Caractérisation de la continuité d'une AL par $\|u(x)\| \leqslant k\|x\|$, par l'image de la boule unité, par l'image de la sphère unité.

- Norme subordonnée, ou norme triple. Sous-multiplicativité. L'e.v.n. $\mathcal{L}_c(E, F)$.
- Caractérisation de la continuité des applications multilinéaires (démonstration non exigible)

6. **E.V.N. de dimension finie, et conséquences sur la continuité**
   - Équivalence des normes en dimension finie. Caractérisation de la convergence coordonnée par coordonnée.
   - Conséquences topologiques
     * Bolzano-Weierstrass dans un e.v.n. de dimension finie
     * Caractérisation des compacts en dimension finie ; compacité des boules
     * Les sous-espaces de dimension finie d'un e.v.n. sont fermés.
   - Conséquences sur la continuité des AL
     * Continuité des AL en dimension finie
     * Cas matriciel. Norme triple associée à une matrice
     * Continuité des applications multilinéaires en dimension finie
   - Applications polynomiales
     * Définition d'une application polynomiale $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$.
     * Continuité des applications polynomiales
     * Continuité de det
     * (HP) Extension de la notion d'application polynomiale entre deux ev de dimension finie, invariance du caractère polynomial vis-à-vis du choix des bases (non exigible). Continuité.

Chapitre 6 : Procédés sommatoires

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 5, 6, 7, 40, 46, 54, 61, 89

Seuls les exercices 5, 6, 7, 46, 54, 89 peuvent être abordés pour le moment. Les deux autres requièrent des notions sur les séries dans un e.v.n. qui ne seront vues que la semaine de la rentrée.

Révision des chapitres de MPSI sur les séries numériques et sur les familles sommables. Le cours n'a pas été repris cette année.

Liste des questions de cours à préparer

Cette liste n'empêche par le colleur, s'il le souhaite, d'évaluer votre connaissance du reste du cours, notamment des énoncés et définitions qui doivent être connus de façon très précise

1. Limites partielles, caractérisation de la limite par les limites partielles sur un nombre fini de domaines couvrants.
2. Continuité uniforme : définition, critère séquentiel (avec preuve), théorème de Heine (avec preuve).
3. Continuité de la norme et de la distance à une partie non vide A.
4. Image réciproque de fermés et d'ouverts.
5. Théorème de compacité et théorème des bornes atteintes.
6. Définition des composantes connexes par arcs, d'un ensemble connexe par arc, et preuve de la connexité par arcs de $S(0, 1)$ en dimension $\geqslant 2$.
7. Caractérisation de la continuité d'une AL par majoration de $\|u(x)\|$, par image de la boule unité et de la sphère unité
8. Équivalence des normes en dimension finie.
9. Caractérisation des compacts en dimension finie (en la supposant déjà connue pour $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$). Continuité des AL de E dans F, avec les hypothèses adéquates sur la dimension.
10. Un sous-espace de dimension finie d'un e.v.n. est fermé.

Énoncé des exercices de la banque CCINP à préparer

Exercice – (Banque CCINP n° 1)
On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \qquad \text{et} \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

1. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
   (a) Soit $u : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0). \end{array}\right.$
   Prouver que u est une application continue sur E.
   (b) On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
3. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.
   Soit $c : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1. \end{array}\right.$
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.
   (b) On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. On note $\overline{F}$ l'adhérence de F.
   Prouver que $c \in \overline{F}$.
   F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_1$?

Exercice – (Banque CCINP n° 13)

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots. + a_nX^n$ de E par : $\|P\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
   (a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] \,/\, \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
   (b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m et n entiers naturels distincts.
   $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

Exercice – (Banque CCINP n° 35)
E et F désignent deux espaces vectoriels normés.
On note $\|\cdot\|_E$ (respectivement $\|\cdot\|_F$) la norme sur E (respectivement sur F).

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E.
   On considère les propositions suivantes :

   P1. f est continue en a.

   P2. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.

2. Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F. Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Exercice – (Banque CCINP n° 37)

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice – (Banque CCINP n° 5)

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Cas $\alpha \leqslant 0$.

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) Cas $\alpha > 0$.

   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice – (Banque CCINP n° 6)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice – (Banque CCINP n° 7)

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit non nulle à partir d'un certain rang.
   (a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   (b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive. Prouver que :

   $$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln(n)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

   Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Exercice – (Banque CCINP n° 46)
On considère la série : $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice – (Banque CCINP n° 54)
Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
   (a) Prouver que $||\,.\,||$ est une norme sur E.
   (b) Prouver que : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
   (c) On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$.
   Prouver que f est continue sur E.

Exercice – (Banque CCINP n° 89)
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

Prévisions pour la semaine suivante :

- Compléments asymptotiques sur les séries numériques,
- séries dans un e.v.n. de dimension finie.