

Programme des colles de la semaine 7 (11/11 – 15/11)

Chapitre 5 : Continuité sur un e.v.n.

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 1, 13, 35, 36, 37, 38

4. Connexité par arcs

- Parties connexes par arcs
 - * Définition d'un arc continu, relation « être relié par un arc », définition des composants connexes par arcs.
 - * Partie connexe par arcs, exemples importants ($\mathbb{C}^*$, $S(A, r)$ en dimension (réelle) supérieure à 2).
 - * Parties étoilées. Parties convexes. Connexité des boules et des sev.
- Image continue d'une partie connexe par arcs
 - * Image d'un connexe par arcs par une fonction continue.
 - * Exemple : $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

5. Continuité des applications linéaires

- Caractérisation de la continuité d'une AL par $\|u(x)\| \leq k\|x\|$, par l'image de la boule unité, par l'image de la sphère unité.
- Norme subordonnée, ou norme triple. Sous-multiplicativité. L'e.v.n. $\mathcal{L}_c(E, F)$.
- Caractérisation de la continuité des applications multilinéaires (démonstration non exigible)

6. E.V.N. de dimension finie, et conséquences sur la continuité

- Équivalence des normes en dimension finie. Caractérisation de la convergence coordonnée par coordonnée.
- Conséquences topologiques
 - * Bolzano-Weierstrass dans un e.v.n. de dimension finie
 - * Caractérisation des compacts en dimension finie ; compacité des boules
 - * Les sous-espaces de dimension finie d'un e.v.n. sont fermés.
- Conséquences sur la continuité des AL
 - * Continuité des AL en dimension finie
 - * Cas matriciel. Norme triple associée à une matrice
 - * Continuité des applications multilinéaires en dimension finie
- Applications polynomiales
 - * Définition d'une application polynomiale $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$.
 - * Continuité des applications polynomiales
 - * Continuité de $\det$
 - * (HP) Extension de la notion d'application polynomiale entre deux ev de dimension finie, invariance du caractère polynomial vis-à-vis du choix des bases (non exigible). Continuité.

Chapitre 6 : Procédés sommatoires

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 5, 6, 7, 40, 46, 54, 61, 89

1. Rappels et compléments sur les séries numériques

- Convergences
 - * Rappels des définitions importantes (convergence, convergence absolue, divergence, divergence grossière...)
 - * TCSTP, CVA implique CV, Linéarité
- Comparaisons série-intégrale
 - * Théorème de comparaison série-intégrale
 - * Séries de Riemann, séries de Bertrand (HP)
 - * Utilisation des comparaisons série-intégrale pour trouver des équivalents de restes ou sommes partielles. Pas de résultat précis au programme à ce propos, mais il est stipulé que les étudiants doivent savoir manier les comparaisons série-intégrale dans le but d'estimer restes et sommes partielles.
 - * Exemples : équivalents des sommes partielles ou restes des séries de Riemann. Le résultat peut être utilisé directement sans preuve si besoin (mais il faut tout de même savoir le redémontrer à la demande, puisqu'il n'est pas explicitement au programme)
- Théorèmes de comparaison pour la convergence absolue
 - * Comparaison par o , O , équivalent pour la convergence absolue.
 - * Règle de d'Alembert
- Semi-convergence
 - * Critère spécial de convergence des séries alternées.
 - * Série harmonique associée et plus généralement $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
 - * Comment s'y ramener par DL.
- Techniques asymptotiques
 - * Théorème de sommation des relations de comparaison (démonstration en se ramenant au cas des intégrales)
 - * Théorème de Cesàro (cas fini dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cas infini)
 - * Équivalents des sommes partielles et restes de séries de Riemann, revisités.
 - * DA à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$ de la somme harmonique.
 - * Exemples du même type, en retranchant les équivalents et en se ramenant à des sommes télescopiques ; savoir basculer du cas divergent au cas convergent.

2. Séries vectorielles

- Définitions et propriétés générales
 - * Convergence d'une série dans un e.v.n. quelconque.
 - * Convergence du terme général d'une série convergente. Divergence grossière.
 - * Linéarité
 - * Utilisation des séries télescopiques pour étudier les suites.
- **Séries à valeurs dans un e.v.n. de dimension finie**
 - * CVA implique CV
 - * Exemple et définition : série exponentielle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{L}(E)$

Pour le moment, nous n'avons fait que définir l'exponentielle de matrice ou d'endomorphisme, aucune propriété n'a été donnée. L'exponentielle sera étudiée plus en détail plus tard.

Liste des questions de cours à préparer

1. Définition des composantes connexes par arcs, d'un ensemble connexe par arc, et preuve de la connexité par arcs de $S(0, 1)$ en dimension ≥ 2 .
2. Caractérisation de la continuité d'une AL par majoration de $\|u(x)\|$, par image de la boule unité et de la sphère unité

3. Équivalence des normes en dimension finie.
4. Caractérisation des compacts en dimension finie (en la supposant déjà connue pour $\|\cdot\|_{\mathcal{B},\infty}$). Continuité des AL de E dans F , avec les hypothèses adéquates sur la dimension.
5. Un sous-espace de dimension finie d'un e.v.n. est fermé.
6. Équivalent des restes des séries de Riemann convergentes, par une technique de comparaison série-intégrale.
7. Règle de d'Alembert, et application à la série exponentielle et à la série $\sum \frac{x^n}{n}$.
8. Énoncé précis du théorème de sommation des relations de comparaison, énoncé et démonstration du théorème de Cesaro (cas fini).
9. Présenter le calcul du DA de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.
10. Lien entre CV et CVA pour des séries à valeurs dans un evn de dimension finie. Exemple de la série exponentielle matricielle.

Énoncé des exercices de la banque CCINP à préparer

Exercice – (Banque CCINP n° 1)

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\forall f \in E, \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

1. Les normes $\|\cdot\|_{\infty}$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.
 - (a) Soit $u : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto f(0). \end{cases}$
Prouver que u est une application continue sur E .
 - (b) On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.
3. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.
Soit $c : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 1. \end{cases}$
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.
 - (b) On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. On note $\overline{F}$ l'adhérence de F .
Prouver que $c \in \overline{F}$.
 F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_1$?

Exercice – (Banque CCINP n° 5)

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - (a) Cas $\alpha \leq 0$.
En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.
 - (b) Cas $\alpha > 0$.
Étudier la nature de la série.
Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

Exercice – (Banque CCINP n° 6)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

Exercice – (Banque CCINP n° 7)

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit non nulle à partir d'un certain rang.

(a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

(b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive. Prouver que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{((-1)^n + i) \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln(n)}{(\sqrt{n+3}-1)}$.

Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1 .

Exercice – (Banque CCINP n° 40)

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\|\cdot\|$.

On suppose que : $\forall (u, v) \in A^2, \|u \cdot v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

(a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.

(b) Démontrer que $(e - u)$ est inversible et que $(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

Exercice – (Banque CCINP n° 46)

On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge.

3. $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice – (Banque CCINP n° 54)

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.

2. On pose : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

(a) Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .

(b) Prouver que : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

(c) On pose : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

Prouver que f est continue sur E .

Exercice – (Banque CCINP n° 61)

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Démontrer que : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \|AB\| \leq n \|A\| \|B\|$.

Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geq 1, \|A^p\| \leq n^{p-1} \|A\|^p$.

3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.

Est-elle convergente ?

Exercice – (Banque CCINP n° 89)

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose $z = e^{i \frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.

2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Prévisions pour la semaine suivante :

- Reprise du chapitre sur les séries
- Structures algébriques (groupes, anneaux, idéaux), avec sans doute très peu d'exercices (je perds 2h de cours et 2h/élève de TD).