Lycée Lakanal, Sceaux 2024/2025
MP – Mathématiques
A. Troesch

Programme des colles de la semaine 8 (18/11 – 22/11)

Chapitre 6 : Procédés sommatoires

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 5, 6, 7, 40, 46, 54, 61, 89

1. **Rappels et compléments sur les séries numériques**
   - Convergences
     - Rappels des définitions importantes (convergence, convergence absolue, divergence, divergence grossière...)
     - TCSTP, CVA implique CV, Linéarité
   - Comparaisons série-intégrale
     - Théorème de comparaison série-intégrale
     - Séries de Riemann, séries de Bertrand (HP)
     - Utilisation des comparaisons série-intégrale pour trouver des équivalents de restes ou sommes partielles. Pas de résultat précis au programme à ce propos, mais il est stipulé que les étudiants doivent savoir manier les comparaisons série-intégrale dans le but d'estimer restes et sommes partielles.
     - Exemples : équivalents des sommes partielles ou restes des séries de Riemann. Le résultat peut être utilisé directement sans preuve si besoin (mais il faut tout de même savoir le redémontrer à la demande, puisqu'il n'est pas explicitement au programme)
   - Théorèmes de comparaison pour la convergence absolue
     - Comparaison par o, O, équivalent pour la convergence absolue.
     - Règle de d'Alembert
   - Semi-convergence
     - Critère spécial de convergence des séries alternées.
     - Série harmonique associée et plus généralement $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
     - Comment s'y ramener par DL.
   - Techniques asymptotiques
     - Théorème de sommation des relations de comparaison (démonstration en se ramenant au cas des intégrales)
     - Théorème de Cesàro (cas fini dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cas infini)
     - Équivalents des sommes partielles et restes de séries de Riemann, revisités.
     - DA à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$ de la somme harmonique.
     - Exemples du même type, en retranchant les équivalents et en se ramenant à des sommes téléescopiques ; savoir basculer du cas divergent au cas convergent.

2. **Séries vectorielles**
   - Définitions et propriétés générales
     - Convergence d'une série dans un e.v.n. quelconque.
     - Convergence du terme général d'une série convergente. Divergence grossière.
     - Linéarité
     - Utilisation des séries téléscopiques pour étudier les suites.
   - **Séries à valeurs dans un e.v.n. de dimension finie**
     - CVA implique CV

- Exemple et définition : série exponentielle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{L}(E)$

  Pour le moment, nous n'avons fait que définir l'exponentielle de matrice ou d'endomorphisme, aucune propriété n'a été donnée. L'exponentielle sera étudiée plus en détail plus tard.

Chapitre 7 : Structures algébriques

On pourra à l'occasion de ce chapitre redonner (plutôt en fin de colle) des exercices de révision en arithmétique et sur les polynômes. Ces révisions n'ont pas été reprises cette année.

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 84, 85, 86, 87, 90, 94

(pas encore les 85, 87, 90 cette semaine)

PAS ENCORE D'EXERCICES traités en cours. Les points qui suivent ne pourront cette semaine que faire l'objet de questions de cours, ou d'exercices de la base CCINP.
On pourra également donner dès cette semaine des exercices de révision de Sup sur ces thèmes, notamment sur les polynômes et l'arithmétique.

1. **Groupes**
   - Rappels
     - Définitions : groupe, groupe abélien, notation multiplicative, additive.
     - Morphismes de groupe, isomorphismes, endomorphismes, automorphismes.
     - Composée de morphisme, réciproque d'isomorphismes.
   - Sous-groupes
     - Sous-groupe, caractérisations
     - Images directes et réciproques de sous-groupes par un morphisme.
     - Noyau d'un morphisme. Caractérisation de l'injectivité.
     - Intersection de sous-groupes
     - Sous-groupe engendré par une partie : définition par minimalité, existence par intersection, description explicite par produit d'éléments de X et de leurs inverses.
     - Partie génératrice d'un groupe.
     - Sous-groupes de $\mathbb{Z}$. *La description des sous-groupes de $\mathbb{R}$ n'est pas au programme*.
   - Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.
     - Définition par classes de congruence, définition de l'opération. Structure de groupe.
     - CNS sur $\mathrm{Ker}(\varphi)$ pour que le morphisme $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ se factorise par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
     - Isomorphisme entre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{U}_n, \times)$
     - Les groupes quotients, et le premier théorème d'isomorphisme, sous-jacents à certaines construction et certains résultats de ce paragraphe ne sont pas au programme !
   - Groupes monogènes
     - Groupe monogène, groupe cyclique, générateur d'un groupe monogène
     - Description explicite par les puissances de x.
     - Tout groupe monogène est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/\ \mathbb{Z}$.
   - Ordre d'un élément
     - Ordre d'un élément, lien avec l'ordre du sous-groupe monogène engendré.
     - Caractérisation des k tels que $x^k = e$.
     - Théorème de Lagrange dans un groupe fini : l'ordre de x divise l'ordre de G.

       Démonstration exigible seulement dans le cas abélien.

       Le théorème de Lagrange pour l'ordre des sous-groupes n'est pas au programme. Il a été évoqué et démontré, de sorte à avoir dans le cours une preuve complète du théorème de Lagrange pour l'ordre des éléments, mais cette preuve est hors-programme et non exigible. L'idée importante de partitionnement en classes aH pourra cependant être retenue par les meilleurs élèves. Les groupes quotients ne par plus au programme qu'avant.

2. **Anneaux et idéaux**
   - Rappels
     * Définition d'un anneau, d'un corps.
     * Groupe des inversibles
     * Propriété de régularité, diviseurs de 0, lien entre les deux.
     * Anneaux intègre (par définition un anneau intègre sera supposé commutatif)
     * Rappels calculatoires : formule du binôme, factorisation de $a^n - b^n$, avec l'hypothèse idoine.
     * Homomorphismes d'anneaux
     * Sous-anneaux, caractérisation
     * Anneau produit, groupe des inversibles de $A \times B$.
   - Idéaux
     * Définition d'un idéal d'un anneau commutatif. *Le cas des idéaux à gauche, droite, bilatère d'un anneau non commutatif n'est pas au programme*
     * Le noyau d'un morphisme d'anneau est un idéal.
     * xA est un idéal. Minimalité parmi les idéaux contenant x. Notion d'idéal principal.
     * Anneau principal (par définition un anneau principal est supposé intègre, donc aussi commutatif).
     * Divisibilité dans un anneau intègre. Caractérisation par les idéaux principaux.
     * Somme d'un nombre fini d'idéaux (démonstration faite pour 2)
   - Idéaux de $\mathbb{Z}$ et arithmétique
     * Décription des idéaux de $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ est principal.
     * Définition par les idéaux du pgcd de n entiers non tous nuls. Interprétation en terme de divisibilité. Rapport avec Bézout
     * (HP) Définition d'un pgcd et d'un ppcm dans un anneau principal.
3. **L'anneau** $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$
   - Propriétés d'inversibilité
     * Structure d'anneau. Description des éléments inversibles. Trouver un inverse à l'aide d'une relation de Bézout.
     * CNS pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps. Notation $\mathbb{F}_p$.
   - Théorème des restes chinois
     * Théorème choinois : isomophisme entre $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sous les bonnes conditions.
     * Application à la résolution de systèmes de congruences dont les modules de congruence sont 2 à 2 premiers entre eux.
     * Cas de systèmes avec des modules de congruence non premiers entre eux (uniquement vu au travers d'exemples).
   - Indicatrice d'Euler φ
     * Définition
     * Théorème d'Euler, lien avec le théorème de Fermat.
     * Multiplicativité arithémtique de φ, calcul de $\varphi(p^k)$, puis de $\varphi(n)$ en fonction de la décomposition en produit de facteurs premiers.

Liste des questions de cours à préparer

1. Équivalent des restes des séries de Riemann convergentes, par une technique de comparaison série-intégrale.
2. Régle de d'Alembert, et application à la série exponentielle et à la série $\sum \frac{x^n}{n}$.
3. Énoncé précis du théorème de sommation des relations de comparaison, énoncé et démonstration du théorème de Cesaro (cas fini).

4. Présenter le calcul du DA de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.
5. Lien entre CV et CVA pour des séries à valeurs dans un evn de dimension finie. Exemple de la série exponentielle matricielle.
6. Définition, existence, et descriptions (par intersection ou par les éléments) du sous-groupe engendré par une partie
7. Description des sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Conséquence sur la structure des groupes monogènes.
8. Définition de l'ordre d'un élément. Théorème de Lagrange (énoncé général, démonstration dans le cas où G est abélien)
9. Définition d'un idéal d'un anneau. Idéal principal (définition et vérification du fait que c'est un idéal). Cas de $\mathbb{Z}$. Définition du PGCD à l'aide des idéaux.
10. Indicatrice d'Euler. Théorème d'Euler. Multiplicativité arithmétique.

Énoncé des exercices de la banque CCINP à préparer

Exercice – (Banque CCINP n° 6)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^n}$?

Exercice – (Banque CCINP n° 7)

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit non nulle à partir d'un certain rang.
   (a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   (b) Dans cette question, on suppose que (v_n) est positive. Prouver que :
   $$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$
2. Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{((-1)^n + \mathrm{i}) \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \ln(n)}{\left(\sqrt{n+3} - 1\right)}$.

   Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Exercice – (Banque CCINP n° 40)
Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\|\cdot\|$.
On suppose que : $\forall (u,v) \in A^2$, $\|u \cdot v\| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.
   (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
   (b) Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$.
2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.

Exercice – (Banque CCINP n° 46)
On considère la série : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice – (Banque CCINP n° 54)
Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
   (a) Prouver que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.
   (b) Prouver que : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
   (c) On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$.
   Prouver que f est continue sur E.

Exercice – (Banque CCINP n° 61)
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j}|$.

1. Prouver que $||\ ||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Démontrer que : $\forall\,(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n\,\|A\|\,\|B\|$.
   Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|A\|^p$.
3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
   Est-elle convergente ?

Exercice – (Banque CCINP n° 84)

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice – (Banque CCINP n° 86)

1. Soit $(a,b,p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.
2. Soit p un nombre premier.
   (a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\dbinom{p}{k}k!$ puis en déduire que p divise $\dbinom{p}{k}$.
   (b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p$.
   Indication : procéder par récurrence.

(c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Exercice – (Banque CCINP n° 89)

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice – (Banque CCINP n° 94)

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
   Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
3. On considère le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 6 \; [17] \\ x \equiv 4 \; [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
   (b) *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

Prévisions pour la semaine suivante :

- Reprise du chapitre les structures algébriques, augmenté des compléments sur l'arithmétique des polynômes (et avec les exercices)
- Compléments d'algèbre linéaire (sommes directes, blocs, algèbres, polynômes d'endomorphismes). Sans doute avec peu ou pas d'exercices.