Programme des colles de la semaine 10 (02/12 – 06/12)

Chapitre 8 : Compléments d'algèbre linéaire

Les notions d'algèbre linéaire vues en Sup (voir liste ci-dessous) ne sont pas reprises, mais elles pourront faire l'objet d'un petit exercice de révision.

Thèmes de sup à revoir :
- Définitions générales d'algèbre linéaire, bases, dimension finie
- Applications linéaires, détermination sur une base, théorème du rang. Projecteurs et symétries.
- Représentation matricielle dans une base. Formule de changement de base. Matrices équivalentes, matrices semblables
- Déterminants

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 60, 62, 64, 71, 93

ENCORE PEU D'EXERCICES traités en cours sur les notions qui suivent.
(Les TD ont prit un peu de retard par rapport au cours, on avancera les exercices en cours de semaine)

1. **Sommes directes et blocs**
   - Sommes directes.
     Il s'agit de généraliser la notion de somme directe de deux sev vue en Sup, au cas d'un nombre fini quelconques de sev.
     * Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E
     * Somme directe d'un nombre fini de sev, définie par propriétés équivalentes (unicité de la décomposition d'un x, ou de 0, intersections nulles)
     * Majoration de la dimension d'une somme quelconque, avec égalité ssi la somme est directe.
     * Concaténations de base, base adaptée à une décomposition de E en somme directe (donné dans le cours en dimension finie uniquement, pour alléger les indexations).
     * Projecteurs associés à une somme directe. Description de leurs composées.
   - Détermination d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$
     * Détermination d'un AL par ses restrictions aux facteurs d'une décomposition en somme directe de E.
     * Interprétation matricielle dans une base adaptée.
     * Composantes d'une AL sur les facteurs d'une décomposition en somme directe de F. Description matricielle dans une base adaptée
     * Expression de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ en fonction des restrictions aux E_i des composantes sur les F_i, dans le cas où on dispose de décompositions en sommes directes de E et de F ($\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases adaptées).
     * Cas d'un endomorphisme laissant stable les facteurs d'une décomposition en $\oplus$ de E.
   - Calcul matriciel par blocs
     * Décomposition en blocs d'une matrice. Matrice diagonale par blocs, triangulaire par blocs (pour ces deux cas, les blocs diagonaux seront systématiquement carrés, donc les regroupements des lignes et des colonnes sont les mêmes).
     * Découpages par blocs de A et B compatibles pour le produit (mêmes regroupements sur les colonnes de A que sur les lignes de B)
     * Règle de produit matriciel par blocs.
       Démonstration faite en cours, mais non exigible, conformément au programme officiel.

    - Produits et puissances de matrices triangulaires par blocs, diagonales par blocs
  - Déterminants par blocs
    - Transvection par blocs $L_i \leftarrow L_i + TL_k$, $T \in \mathcal{M}_{m_i,m_k}(\mathbb{K})$ (les m_i étant les tailles des regroupements par lignes, les L_i représentant chacun des blocs de lignes).
    - Expression matricielle, et invariance du déterminant par transvection par blocs)
    - On pourra admettre une règle similaire pour les transvections par colonnes.
    - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

2. **Algèbres**
  - Définitions générales
    - Algèbre, sous-algèbre, morphisme d'algèbre. Les algèbres sont unitaires.
    - Caractérisation des sous-algèbres, image d'une sous-algèbres.
    - Morphisme ev_a d'évaluation d'un polynôme.
  - Spécialisation.
    - Spécialisation d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ sur un élément d'une $\mathbb{K}$-algèbre.
    - Exemples importants : spécialisation sur une matrice carrée, sur un endomorphisme.
    - Morphisme S_a de spécialisation. $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
    - Sous-algèbre $\mathbb{K}[a]$ engendrée par a.
    - Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent, alors $P(u)$ et $Q(v)$ aussi, et $Q(v)$ laisse $\mathrm{Im}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(P(u))$ stables.

3. **Polynômes d'endomorphismes (et de matrices)**
  - Polynômes annulateurs, polynôme minimal
    - Idéal des polynômes annulateurs. Si $I \neq \{0\}$, polynôme minimal (unitaire par définition)
    - Existence d'un polynôme annulateur non nul en dimension finie, et donc aussi du polynôme minimal.
    - Base et dimension de $\mathbb{K}[u]$ en fonction du degré du polynôme minimal (en cas d'existence, notamment en dimension finie)
    - Endomorphismes nilpotents, indice de nilpotence (ou nilindice).
    - Caractérisation d'un endomorphisme nilpotent et de son nilindice par son polynôme minimal.
    - Majoration de l'indice de nilpotence (par description d'une famille libre, ou par théorème de Cayley-Hamilton, en l'admettant provisoirement)
  - Lemme de décomposition des noyaux
    - Lemme de décomposition des noyaux, pour $P_1, \dots, P_n$ deux à deux premiers entre eux.
    - Décomposition de E issue d'une décomposition en facteurs irréductibles d'un polynôme annulateur.
    - Résultat de diagonalisation avant l'heure : avec E de dimension finie, si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, alors il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.

Chapitre 9 : Réduction des endomorphismes

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 59, 65, 67, 69, 70, 72, 73, 83, 88, 91

Cette semaine, seulement les exercices 59, 65, 83, 91

PAS ENCORE D'EXERCICES CETTE SEMAINE. Les points qui suivent ne pourront cette semaine que faire l'objet de questions de cours, ou d'exercices de la base CCINP.

1. **Élements propres d'un endomorphisme**
  - Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres
    - Définitions de ces notions. Notation $E_\lambda(u)$.
    - Définition du spectre (uniquement en dimension finie, la notion de valeur spectrale étant hors programme ; en dimension infinie, on parlera de l'ensemble des valeurs propres et non du spectre)
    - Un nombre fini de sous-espaces propres forme une somme directe. Finitude et majoration du nombre de valeurs propres en dimension finie.

  * Stabilité des sev propres par un endomorphisme commutant avec u.
  * Si P annule u, l'ensemble des valeurs propres est inclus dans $\mathrm{Rac}(P)$. Égalité si $P = \mu_u$.
- Éléménts propres d'une matrice carrée
  * Traduction matricielle des définitions et propriétés précédentes, via l'endomorphisme canoniquement associé
  * Pour toute base, $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$, et les espaces propres de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ sont les $\Phi(E_\lambda(u))$, où $\varphi(x) = [x]_{\mathcal{B}}$.
  * u et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ ont mêmes polynômes annulateurs et donc même polynôme minimal.
  * Inclusion des spectres en cas d'extension des scalaires.
- Polynôme caractéristique
  * Définition de χ_M (unitaire par définition)
  * Degré, coefficients de degré n, $n-1$ et 0 de χ_M.
  * $\mathrm{Rac}(M) = \mathrm{Sp}(M)$.
  * Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire, spectre d'une matrice triangulaire.
  * Comparaison des polynômes caractéristiques de deux matrices semblables.
  * Définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, comme p.c. d'une de ses représentations matricielles.
  * Propriété de divisibilité du polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
- Recherche de valeurs propres :
  * par résolution de l'équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$;
  * par considération des racines d'un polynôme annulateur (encore mieux si minimal) ;
  * par calcul du polynôme caractéristique et de ses racines.
- Multiplicités de valeurs propres
  * Multiplicité géométrique et multiplicité algébrique. Comparaison des deux.
  * Bilan sur le spectre et les multiplicités dans le cas d'un endormorphisme induit, comparé à l'endomorphisme total.
- Théorème de Cayley-Hamilton
  * $\chi_A(A) = 0$. *La démonstration n'est pas exigible.*
    Démontration donnée par identification des coefficients de $(XI_n - M)\mathrm{Com}(XI_n - M)^\top = \chi_M(X)I_n$.
  * μ_u divise χ_u.

Liste des questions de cours à préparer.

Sauf mention explicite du contraire, les démonstrations des différents résultats cités sont aussi demandées

1. Cinq propriétés équivalentes définissant la somme directe d'un nombre fini de sev.
2. Détermination d'une AL $u \in \mathcal{L}(E, F)$ par ses restrictions aux facteurs d'une décomposition en somme directe de E.
3. Définition d'une algèbre, d'un morphisme d'algèbre, définition et caractérisation d'une sous-algèbre (sans preuve).
4. Énoncé du lemme de décomposition des noyaux, dans le cas général. Démontration dans le cas de 2 polynômes.
5. Idéal des polyômes annulateurs, polynôme minimal, existence en dimension finie.
6. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ en dimension finie, dimension de $\mathbb{K}[u]$ en fonction du degré du polynôme minimal.
7. Définition des valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres. Somme directe d'un nombre fini de sev propres. Majoration en dimension finie.
8. Comparaison de l'ensemble des valeurs propres de u et de $\mathrm{Rac}(P)$, quand P est un polynôme annulateur de u. Cas où $P = \mu_u$.
9. Définition du polynôme caractéristique, et expression de 3 de ses coefficients.
10. Si F est stable par u, comparaison des polynômes caractéristiques de u et de u_F. Conséquence sur la comparaison entre multiplicité géométrique et algébrique d'une valeur propre.

Énoncé des exercices de la banque CCINP à préparer

Exercice – (Banque CCINP n° 60)
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

Exercice – (Banque CCINP n° 62)
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:
   (a) en utilisant le lemme des noyaux.
   (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

Exercice – (Banque CCINP n° 64)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. (a) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   (b) Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

Exercice – (Banque CCINP n° 71)
Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Exercice – (Banque CCINP n° 93)
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im} u \oplus \mathrm{Ker} u = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im} u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif.
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Exercice – (Banque CCINP n° 59)
Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
   (a) sans utiliser de matrice de f,
   (b) en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
3. f est-il diagonalisable ?

Exercice – (Banque CCINP n° 65)
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Démontrer que, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
   (P polynôme annulateur de u)$\Longrightarrow$ (PQ polynôme annulateur de u)
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

Exercice – (Banque CCINP n° 83)
Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
   Indication : penser à utiliser le déterminant.

Exercice – (Banque CCINP n° 91)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Prévisions pour la semaine suivante :

- Suite de la réduction des endomorphismes.