Programme des colles de la semaine 12 (16/12 – 20/12)

Chapitre 9 : Réduction des endomorphismes

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 59, 65, 67, 69, 70, 72, 73, 83, 88, 91

(Cette semaine, seulement les exercices 69, 72, 73, 88)

1. **Élements propres d'un endomorphisme**
   - Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres
     - Définitions de ces notions. Notation $E_\lambda(u)$.
     - Définition du spectre (uniquement en dimension finie, la notion de valeur spectrale étant hors programme ; en dimension infinie, on parlera de l'ensemble des valeurs propres et non du spectre)
     - Un nombre fini de sous-espaces propres forme une somme directe. Finitude et majoration du nombre de valeurs propres en dimension finie.
     - Stabilité des sev propres par un endomorphisme commutant avec u.
     - Si P annule u, l'ensemble des valeurs propres est inclus dans $\mathrm{Rac}(P)$. Égalité si $P = \mu_u$.
   - Éléménts propres d'une matrice carrée
     - Traduction matricielle des définitions et propriétés précédentes, via l'endomorphisme canoniquement associé
     - Pour toute base, $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$, et les espaces propres de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ sont les $\Phi(E_\lambda(u))$, où $\varphi(x) = [x]_{\mathcal{B}}$.
     - u et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ ont mêmes polynômes annulateurs et donc même polynôme minimal.
     - Inclusion des spectres en cas d'extension des scalaires.
   - Polynôme caractéristique
     - Définition de χ_M (unitaire par définition)
     - Degré, coefficients de degré n, $n-1$ et 0 de χ_M.
     - $\mathrm{Rac}(M) = \mathrm{Sp}(M)$.
     - Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire, spectre d'une matrice triangulaire.
     - Comparaison des polynômes caractéristiques de deux matrices semblables.
     - Définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, comme p.c. d'une de ses représentations matricielles.
     - Propriété de divisibilité du polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
   - Recherche de valeurs propres :
     - par résolution de l'équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$;
     - par considération des racines d'un polynôme annulateur (encore mieux si minimal) ;
     - par calcul du polynôme caractéristique et de ses racines.
   - Multiplicités de valeurs propres
     - Multiplicité géométrique et multiplicité algébrique. Comparaison des deux.
     - Bilan sur le spectre et les multiplicités dans le cas d'un endormorphisme induit, comparé à l'endomorphisme total.
   - Théorème de Cayley-Hamilton
     - $\chi_A(A) = 0$. *La démonstration n'est pas exigible.*
       Démontration donnée par identification des coefficients de $(XI_n - M)\mathrm{Com}(XI_n - M)^\top = \chi_M(X)I_n$.
     - μ_u divise χ_u.
2. **Diagonalisation**
   - Diagonalisation d'un endomorphisme, point de vue géométrique

- * Définitions.
  * CNS « géométriques » de diagonalisabilité (par la somme directe des sev, somme de leur dimension, ou comparaison des multiplicités géométriques et algébriques).
  * Cas d'un endomorphisme ayant n vp ($n = \dim(E)$). Reexpression par CS sur le polynôme caractéristique (simplement scindé).
- Diagonalisation d'un endomorphisme, point de vue algébrique
  * Caractérisation de la diagonalisabilité par un polynôme annulateur, par le polynôme minimal. Expression du polynôme minimal dans ce cas.
  * Relation entre polynôme minimal de u et d'un induit u_F. Diagonalisabilité d'un induit d'un endomorphisme diagonalisable.
  * (HP classique) Codiagonalisabilité de 2 endomorphismes diagonalisables qui commutent.
- Diagonalisation d'une matrice
  * Définition par l'endomorphisme canoniquement associé, réexpression en termes matriciels sous forme de relation de similitude.
  * Equivalence entre la diagonalisabilité de f et la diagonalisabilité de la matrice dans n'importe quelle base.
  * Méthode effective de diagonalisation. Dans la pratique, pour des matrices numériques, le programme stipule de se limite aux matrices d'ordre 2 et 3.

3. **Trigonalisation**
   - Trigonalisabilité et caractérisations almgébriques
     * Définition (cas des endomorphismes, cas des matrices)
     * Caractérisation par stabilisation d'un drapeau.
     * Caractérisation par existence d'un polynôme annulateur scindé, par scindement du polynôme caractéristique, par scindement du polynôme minimal, sous forme d'une équivalence entre 4 propriétés (CH est déjà connu et a été montré indépendamment, on s'en est donc servi pour cette preuve, mais j'ai indiqué comment on pouvait s'en dispenser).
     * Trigonalisabilité des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   - Endomorphismes nilpotents
     * caractérisations des endomorphismes nilpotents par leur poluynôme minimal, par leur spectre et la trigonalisabilité, par leur polynôme caractéristique (sous forme d'une équivalence entre 6 propriétés)
   - Sous-espaces caractéristiques
     * Définition des sous-espaces caractéristiques (notation $N_\lambda(u)$ ou $\mathrm{SEC}_\lambda(E)$), décomposition de l'espace en somme directe des SEC lorsque χ_u est scindé, dimension des SEC.
     * Lorsque χ_u est scindé, trigonalisation diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux de coefficients diagonaux constants.
     * (HP classique) Existence de la décomposition de Dunford $u = n + d$, avec n nilpotent, d diagonalisable, et $nd = dn$ (l'unicité n'a pas été évoquée).

Chapitre 10 : Suites et séries de fonctions :

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 48, 53

(Cette semaine, seulement les exercices 9, 10, 11, 12, 48)

ENCORE PEU D'EXERCICES traités en cours sur les notions qui suivent.
Nous avons vu seulement des exemples et exercices de cours, pour illustrer les différentes méthodes dans des situations concrètes. Se limiter à ce type d'exercices concrets pour cette semaine, tout en étant conscient que la pratique reste encore très limitée pour le moment, surtout en début de semaine.

1. **Modes de convergence d'une suite de fonctions** Les fonctions f_n sont définies sur une partie A d'un evn de dimension finie E, et à valeurs dans un evn F de dimension finie. Dans la pratique, au moins dans un premier temps, on se concentrera surtout sur les cas réel et complexe.

- Convergence simple
  - Définition
  - Unicité de la limite simple. Exemples et contre-exemple pour la continuité de la limite simple d'une suite de fonctions continues.
- Convergence uniforme
  - Convergence uniforme sur une partie B de A. Convergence uniforme sur A.
  - Caractérisation par le caractère borné àpcr de $f_n - f$ et par la convergence de $f_n - f$ dans l'evn $(\mathcal{B}(A,F), \|\cdot\|_\infty)$. Extension de la notation $\|f\|_\infty$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
  - Exemples d'étude de CVU. On commencera toujours par rechercher la limite simple. Puis on procédera par majoration de $\|f_n - f\|_\infty$. Dans le cas réel, si aucune majoration simple ne ressort, on pourra étudier les extrema de la fonction $f_n - f$.
- Convergence uniforme locale.
  - Convergence uniforme au voisinage d'un point de A
  - La CVU sur $B \subset A$ implique la convergence uniforme au voisinage de tout a dans l'intérieur relatif de B dans A.
  - Lorsque $E = \mathbb{R}$ et A est un intervalle, caractérisation de la convergence uniforme au voisinage de tout point de A par la convergence uniforme sur les segments.

2. **Régularité des limites de suites de fonctions**
- Continuité d'une limite uniforme
  - Continuité au point a d'une limite d'une suite (f_n) uniformément convergente au voisinage de a, telle que toutes les f_n soient continues en a.
  - Continuité sur l'intérieur relatif de B dans A d'une limite uniforme sur B de fonctions continues sur B. Cas $B = A$.
  - Exemple de non continuité sur la frontière relative de B dans la situation précédente.
- Limite lorsque $x \longrightarrow a \in \overline{A}$.
  - Théorème de la double limite. *(Démonstration non exigible, mais faite en cours)*
  - Un contre-exemple pour montrer l'importance de l'hypothèse de CVU.
- Interversion limite/intégrale

  Dans ce paragraphe, les f_n sont définies sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Dans la pratique, on se limitera pour le moment à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les résultats ont été démontrés dans le cas de fonctions à valeurs dans un evn F de dimension finie, en admettant implicitement la bonne définition de l'intégrale dans ce contexte, l'expression de l'intégrale par les primitives, et l'inégalité triangulaire.
  - Primitivation d'une limite uniforme de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ (dans l'énoncé, les primitives s'annulent en a, mais on pourra l'utiliser pour des primitives s'annulant toutes en $c \in [a,b]$ quelconque fixé).
  - Interversion limite uniforme / intégrale (passage à la limite sous le signe $\int$).
  - Un contre-exemple sans l'hypothèse de CVU.
  - Rapport avec le TCD déjà vu en début d'année.
- Dérivation.

  Dans ce paragraphe, les f_n sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Les résultats ont été démontrés pour des fonctions à valeurs dans un evn F de dimension finie, en admettant que tout s'y passe comme dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans la pratique, on se limitera pour l'instant à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  - Exemples de suites uniformément convergente de fonctions dérivables telle que la limite simple ne soit pas dérivable, ou telle que la limite simple soit dérivable, mais la dérivée n'est pas égale à la limite des dérivées. Mise en garde sur l'hypothèse de CVU de (f_n) qui n'est pas pertinente (ou au moins pas suffisante).
  - Théorème de dérivation d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. La bonne connaissance précise et rigoureuse des hypothèses est indispensable. On prendra garde notamment au fait que l'hypothèse de CVU porte sur (f_n')
  - Théorème de la classe $\mathcal{C}^p$ pour les suites de fonctions.

Liste des questions de cours à préparer.

Sauf mention explicite du contraire, les démonstrations des différents résultats cités sont aussi demandées

1. Caractérisations géométriques de la diagonalisabilité (y compris par comparaison des multiplicités algébrique et géométrique), sous forme d'une équivalence entre 4 propriétés
2. Caractérisations algébriques de la diagonalisabilité (par polynôme annulateur, ou polynôme minimal) sous forme d'une équivalence entre 3 propriétés.
3. Diagonalisabilité d'un induit d'un endomorphisme diagonalisable (avec le lemme sur le polynôme minimal).
4. Énoncé de la caractérisation (en 4 propriétés équivalentes) de la trigonalisation (par χ, polynôme annulateur ou μ), démonstration de μ_u scindé $\Longrightarrow u$ trigonalisable.
5. Caractérisation des endomorphismes nilpotents sous forme d'équivalence entre 6 propriétés.
6. Définition et dimension des sous-espaces caractéristiques. Décomposition de E associée sous l'hypothèse idoine sur χ.
7. Définition de la convergence uniforme d'une suite (f_n) sur un domaine A, CN de CVU par la limite de $f_n(x_n) - f(x_n)$. On pourra prolonger cette question de cours en donnant un exemple simple d'étude de non convergence uniforme.
8. Continuité d'une limite uniforme de fonctions continues. Démonstration pour la continuité en a en cas de convergence uniforme locale.
9. Énoncés (sans preuve) du théorème de la double limite, du théorème de primitivation, et de son corollaire pour l'interversion limite/intégrale. On pourra prolonger cette question de cours par un exemple simple d'utilisation d'un de ces théorèmes.
10. Énoncé du théorème de la classe $\mathcal{C}^p$ des limites de suites de fonctions. Démonstration, dans le cas $p = 1$, de l'égalité $(\lim f_n)' = \lim(f_n')$. On ne demande pas l'étude de la CVU de (f_n).

Énoncé des exercices de la banque CCINP à préparer

Exercice – (Banque CCINP n° 69)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice – (Banque CCINP n° 72)

Soit n un entier naturel non nul.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

Exercice – (Banque CCINP n° 73)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

   En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

Exercice – (Banque CCINP n° 88)

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
   Prouver que si P annule u alors toute valeur propre de u est racine de P.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de E définie par $a_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall M \in E,\ u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.
   (a) Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
   (b) u est-il diagonalisable ?
   Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (l'une avec, l'autre sans l'aide de la question 1.).

Exercice – (Banque CCINP n° 9)

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
   (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
   (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice – (Banque CCINP n° 10)
On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

Exercice – (Banque CCINP n° 11)

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice – (Banque CCINP n° 12)

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0;1]$, $g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

Exercice – (Banque CCINP n° 48)

$C^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.

Prévisions pour la semaine de la rentrée :

- Reprise des suites de fonctions, séries de fonctions, approximations uniformes.
- Cours sur les intégrales à paramètre.

Bonnes vacances