

Programme des colles de la semaine 13 (06/01 – 10/01)

Chapitre 10 : Suites et séries de fonctions :

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 48, 53

1. **Modes de convergence d'une suite de fonctions** Les fonctions f_n sont définies sur une partie A d'un evn de dimension finie E , et à valeurs dans un evn F de dimension finie. Dans la pratique, au moins dans un premier temps, on se concentrera surtout sur les cas réel et complexe.

- Convergence simple
 - * Définition
 - * Unicité de la limite simple. Exemples et contre-exemple pour la continuité de la limite simple d'une suite de fonctions continues.
- Convergence uniforme
 - * Convergence uniforme sur une partie B de A . Convergence uniforme sur A .
 - * Caractérisation par le caractère borné à pcr de $f_n - f$ et par la convergence de $f_n - f$ dans l'evn $(\mathcal{B}(A, F), \|\cdot\|_\infty)$. Extension de la notation $\|f\|_\infty$ dans $\mathbb{R}$.
 - * Exemples d'étude de CVU. On commencera toujours par rechercher la limite simple. Puis on procédera par majoration de $\|f_n - f\|_\infty$. Dans le cas réel, si aucune majoration simple ne ressort, on pourra étudier les extrema de la fonction $f_n - f$.
- Convergence uniforme locale.
 - * Convergence uniforme au voisinage d'un point de A
 - * La CVU sur $B \subset A$ implique la convergence uniforme au voisinage de tout a dans l'intérieur relatif de B dans A .
 - * Lorsque $E = \mathbb{R}$ et A est un intervalle, caractérisation de la convergence uniforme au voisinage de tout point de A par la convergence uniforme sur les segments.

2. Régularité des limites de suites de fonctions

- Continuité d'une limite uniforme
 - * Continuité au point a d'une limite d'une suite (f_n) uniformément convergente au voisinage de a , telle que toutes les f_n soient continues en a .
 - * Continuité sur l'intérieur relatif de B dans A d'une limite uniforme sur B de fonctions continues sur B . Cas $B = A$.
 - * Exemple de non continuité sur la frontière relative de B dans la situation précédente.
- Limite lorsque $x \rightarrow a \in \overline{A}$.
 - * Théorème de la double limite. (*Démonstration non exigible, mais faite en cours*)
 - * Un contre-exemple pour montrer l'importance de l'hypothèse de CVU.
- Intersion limite/intégrale

Dans ce paragraphe, les f_n sont définies sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dans la pratique, on se limitera pour le moment à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les résultats ont été démontrés dans le cas de fonctions à valeurs dans un evn F de dimension finie, en admettant implicitement la bonne définition de l'intégrale dans ce contexte, l'expression de l'intégrale par les primitives, et l'inégalité triangulaire.

- * Primitivation d'une limite uniforme de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ (dans l'énoncé, les primitives s'annulent en a , mais on pourra l'utiliser pour des primitives s'annulant toutes en $c \in [a, b]$ quelconque fixé).
- * Intersion limite uniforme / intégrale (passage à la limite sous le signe $\int$).
- * Un contre-exemple sans l'hypothèse de CVU.

- * Rapport avec le TCD déjà vu en début d'année.
- Dérivation.

Dans ce paragraphe, les f_n sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Les résultats ont été démontrés pour des fonctions à valeurs dans un evn F de dimension finie, en admettant que tout s'y passe comme dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans la pratique, on se limitera pour l'instant à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

 - * Exemples de suites uniformément convergente de fonctions dérivables telle que la limite simple ne soit pas dérivable, ou telle que la limite simple soit dérivable, mais la dérivée n'est pas égale à la limite des dérivées. Mise en garde sur l'hypothèse de CVU de (f_n) qui n'est pas pertinente (ou au moins pas suffisante).
 - * Théorème de dérivation d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. La bonne connaissance précise et rigoureuse des hypothèses est indispensable. On prendra garde notamment au fait que l'hypothèse de CVU porte sur (f'_n)
 - * Théorème de la classe $\mathcal{C}^p$ pour les suites de fonctions.

ENCORE PEU D'EXERCICES traités en cours sur les notions qui suivent.

3. Séries de fonctions

- Modes de convergence
 - * Convergence simple, convergence uniforme
 - * Convergence normale. CVN implique CVU
 - * Comment montrer qu'une CV n'est pas CVN, n'est pas CVU.
 - * Comment justifier une CVU sans CVN par étude du reste. Cas particulier important des séries alternées. Un exemple avec transformation d'Abel (ce type de techniques n'est pas explicitement au programme, guider les étudiants si nécessaire).
- Régularité et interversions
 - * Continuité d'une somme uniformément convergente de fonctions continues
 - * Passage à la limite sous $\sum$ (version sommatoire du théorème de la double-limite)
 - * Théorème d'interversion $\sum$ / $\int$ (sur un segment, en cas de CVU).

(Le théorème d'intégration terme à terme sera vu dans un chapitre ultérieur)
 - * Théorème de dérivation terme à terme.
 - * Théorème de classe $\mathcal{C}^p$ d'une série de fonctions.
 - * Intérêt de l'étude de la CVU sur les segments, ou sur des intervalles adaptés au problème, lorsqu'on n'a pas CVU sur tout le domaine.
- Techniques asymptotiques
 - * Limites au bord du domaine. Recherche d'équivalents, en essayant de se ramener au théorème de la double-limite.

4. Approximations uniformes

- Principes généraux
 - * Notion d'approximation uniforme à ε près.
 - * Fonction pouvant être approchée uniformément par des fonctions d'une famille.
 - * Caractérisation séquentielle
- Approximations uniformes classiques
 - * Fonctions en escalier de $[a, b]$ dans F (e.v.n. de dimension finie). Approximation uniforme des fonctions continues $[a, b] \rightarrow F$ par des fonctions en escalier
 - * Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ par des fonctions en escalier.
 - * Théorème de Weierstrass (*admis*).
 - * Approximation des fonctions continues sur $[a, b]$ par des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Chapitre 11 : Intégrales à paramètre

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 29, 30, 49, 50

Seulement les exercices 29 et 30 cette semaine

PAS ENCORE D'EXERCICES CETTE SEMAINE. Les points qui suivent ne pourront cette semaine que faire l'objet de questions de cours, ou d'exercices de la base CCINP.

NB : le dernier paragraphe (étude de la fonction Γ) ne sera fait en cours que lundi 06/01, et n'est au programme de colle qu'à partir du mercredi 08/01.

1. Suites et séries d'intégrales

- Interversions limites/intégrales
 - * Rappel : interversion limite/intégrale sur un segment par CVU
 - * Extension au cas où les f_n et la limite f sont c.p.m.
 - * Rappel : TCD
- Intégration terme à terme
 - * Rappel : théorème d'intervention somme/intégrale sur un segment par CVU
 - * Théorème d'intégration terme à terme, cas positif (avec validité dans $\overline{\mathbb{R}}_+$). nbrThéorème admis.
 - * Théorème d'intégration terme à terme, cas général. *Théorème admis.*
 - * Possibilité d'utiliser le TCD sur les sommes partielles (cas particulier important : séries alternées).

2. Intégrales à paramètre réel ou vectoriel

3. Limite et continuité d'intégrales à paramètre

- Théorème de convergence dominée, version continue réelle, version continue vectorielle pour $\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt$, où x est une variable dans un e.v.n. de dimension finie, I un intervalle, et f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Continuité d'une intégrale à paramètre (même contexte vectoriel que ci-dessus) : ponctuel, global.

4. Dérivation d'une intégrale à paramètre réel

- Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre réel
- Théorème de la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre réel.

5. Fonction Gamma (HP classique)

- Définition, domaine de définition, identité remarquable, valeur aux entiers et en $\frac{1}{2}$ (en admettant la valeur de l'intégrale de Gauss, calculée lors d'un exemple précédent).
- Continuité, dérivabilité, classe $\mathcal{C}^n$, expression intégrale des dérivées.
- Variations, convexité
- Comportement asymptotique : limites en 0, en $+\infty$, équivalent en 0.

Liste des questions de cours à préparer.

Sauf mention explicite du contraire, les démonstrations des différents résultats cités sont aussi demandées

1. Définition de la convergence uniforme d'une suite (f_n) sur un domaine A , CN de CVU par la limite de $f_n(x_n) - f(x_n)$. On pourra prolonger cette question de cours en donnant un exemple simple d'étude de non convergence uniforme.
2. Continuité d'une limite uniforme de fonctions continues. Démonstration pour la continuité en a en cas de convergence uniforme locale.
3. Énoncés (sans preuve) du théorème de la double limite, du théorème de primitivation, et de son corollaire pour l'intervention limite/intégrale. On pourra prolonger cette question de cours par un exemple simple d'utilisation d'un de ces théorèmes.
4. Énoncé du théorème de la classe $\mathcal{C}^p$ des limites de suites de fonctions. Démonstration, dans le cas $p = 1$, de l'égalité $(\lim f_n)' = \lim(f_n')$. On ne demande pas l'étude de la CVU de (f_n) .
5. Convergence uniforme d'une série de fonctions, convergence normale. CVN implique CVU. Examen de la réciproque via l'étude de $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ sur $[0, 1]$.

6. Énoncé (sans preuve) du théorème de passage à la limite sous $\sum$, exemple développé du calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x)$.
7. Énoncés (sans preuve) du théorème de primitivation et intégration sur un segment (pour la CVU), et du théorème de la classe $\mathcal{C}^p$ d'une série de fonctions.
8. Énoncés (sans preuve) des théorèmes d'intégration terme à terme, dans le cas positif, dans le cas général.
9. Énoncé et preuve du TCD, version continue (réelle ou vectorielle), énoncé sans preuve du théorème de continuité globale d'une intégrale à paramètre.
10. Énoncé (sans preuve) du théorème de la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, et, à partir de mercredi, classe $\mathcal{C}^\infty$ et expression intégrale de la dérivée n -ième de la fonction Γ .

Énoncé des exercices de la banque CCINP à préparer

Exercice – (Banque CCINP n° 8)

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

(a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

(a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

(b) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$.

Exercice – (Banque CCINP n° 9)

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.

Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g .

2. On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1} e^{-nx^2} \cos(\sqrt{n}x)$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) .

(b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

(c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

(d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice – (Banque CCINP n° 10)

On pose $f_n(x) = (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$.

Exercice – (Banque CCINP n° 11)

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f .

On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X .

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
- (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .
- (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice – (Banque CCINP n° 12)

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f , et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0 , avec $x_0 \in [a, b]$.
Démontrer que f est continue en x_0 .
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; 1], g_n(x) = x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

Exercice – (Banque CCINP n° 14)

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice – (Banque CCINP n° 16)

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], u_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0, 1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice – (Banque CCINP n° 17)

Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\begin{aligned} & \left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A \right) \\ & \quad \Downarrow \\ & \left(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur } A \right) \end{aligned}$$

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.
 $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$? Justifier.

Exercice – (Banque CCINP n° 48)

$C^0([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f .
 - (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f^2 .
 - (b) Démontrer que $\int_0^1 f^2(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.
 - (c) Calculer $\int_0^1 P_n(t) f(t) dt$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0, 1]$.

Exercice – (Banque CCINP n° 53)

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^4 x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

- (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

$\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?

- (c) $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice – (Banque CCINP n° 29)

On pose : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in]0, +\infty[,$ la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose alors : $\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

2. Pour tout $x \in]0, +\infty[,$ exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice – (Banque CCINP n° 30)

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
(b) Résoudre (E) .

Prévisions pour la semaine suivante :

- Reprise des séries de fonctions
- Intégrales à paramètre avec les exercices
- Début des rappels et compléments sur les espaces préhilbertiens réels