Programme des colles de la semaine 13 (06/01 – 10/01)

Chapitre 10 : Suites et séries de fonctions :

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 48, 53

3. **Séries de fonctions**
   - Modes de convergence
     - Convergence simple, convergence uniforme
     - Convergence normale. CVN implique CVU
     - Comment montrer qu'une CV n'est pas CVN, n'est pas CVU.
     - Comment justifier une CVU sans CVN par étude du reste. Cas particulier important des séries alternées. Un exemple avec transformation d'Abel (ce type de techniques n'est pas explicitement au programme, guider les étudiants si nécessaire.
   - Régularité et interversions
     - Continuité d'une somme uniformément convergente de fonctions continues
     - Passage à la limite sous $\sum$ (version sommatoire du théorème de la double-limite)
     - Théorème d'interversion $\sum$ / $\int$ (sur un segment, en cas de CVU).

       (Le théorème d'intégration terme à terme sera vu dans un chapitre ultérieur)
     - Théorème de dérivation terme à terme.
     - Théorème de classe $\mathcal{C}^p$ d'une série de fonctions.
     - Intérêt de l'étude de la CVU sur les segments, ou sur des intervalles adaptés au problème, lorsqu'on n'a pas CVU sur tout le domaine.
   - Techniques asymptotiques
     - Limites au bord du domaine. Recherche d'équivalents, en essayant de se ramener au théorème de la double-limite.
4. **Approximations uniformes**
   - Principes généraux
     - Notion d'approximation uniforme à ε près.
     - Fonction pouvant être approchée uniformément par des fonctions d'une famille.
     - Caractérisation séquentielle
   - Approximations uniformes classiques
     - Fonctions en escalier de $[a, b]$ dans F (e.v.n. de dimension finie). Approximation uniforme des fonctions continues $[a, b] \to F$ par des fonctions en escalier
     - Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ par des fonctions en escalier.
     - Théorème de Weierstrass *(admis)*.
     - Approximation des fonctions continues sur $[a, b]$ par des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Chapitre 11 : Intégrales à paramètre

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 29, 30, 49, 50

1. **Suites et séries d'intégrales**
   - Interversions limites/intégrales
     - Rappel : interversion limite/intégrale sur un segment par CVU
     - Extension au cas où les f_n et la limite f sont c.p.m.

  - ⁎ Rappel : TCD
- Intégration terme à terme
  - ⁎ Rappel : théorème d'interversion somme/intégrale sur un segment par CVU
  - ⁎ Théorème d'intégration terme à terme, cas positif (avec validité dans $\overline{\mathbb{R}}_+$). nbrThéorème admis.
  - ⁎ Théorème d'intégration terme à terme, cas général. *Théorème admis*.
  - ⁎ Possibilité d'utiliser le TCD sur les sommes partielles (cas particulier important : séries alternées).

2. **Intégrales à paramètre réel ou vectoriel**
3. Limite et continuité d'intégrales à paramètre
   - Théorème de convergence dominée, version continue réelle, version continue vectorielle pour $\lim\limits_{x\to a}\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, où x est une variable dans un e.v.n. de dimension finie, I un intervalle, et f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   - Continuité d'une intégrale à paramètre (même contexte vectoriel que ci-dessus) : ponctuel, global.
4. Dérivation d'une intégrale à paramètre réel
   - Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre réel
   - Théorème de la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre réel.
5. Fonction Gamma (HP classique)
   - Définition, domaine de définition, identité remarquable, valeur aux entiers et en $\frac{1}{2}$ (en admettant la valeur de l'intégrale de Gauss, calculée lors d'un exemple précédent).
   - Continuité, dérivabilité, classe $\mathcal{C}^n$, expression intégrale des dérivées.
   - Variations, convexité
   - Comportement asymptotique : limites en 0, en $+\infty$, équivalent en 0.

Liste des questions de cours à préparer.

Sauf mention explicite du contraire, les démonstrations des différents résultats cités sont aussi demandées

1. Convergence uniforme d'une série de fonctions, convergence normale. CVN implique CVU. Examen de la réciproque via l'étude de $\sum \frac{(-1)^n}{n}x^n$ sur $[0,1]$.
2. Énoncé (sans preuve) du théorème de passage à la limite sous $\sum$, exemple développé du calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x)$.
3. Énoncés (sans preuve) du théorème de primitivation et intégration sur un segment (pour la CVU), et du théorème de la classe $\mathcal{C}^p$ d'une série de fonctions.
4. Énoncés (sans preuve) des théorèmes d'intégration terme à terme, dans le cas positif, dans le cas général.
5. Énoncé et preuve du TCD, version continue (réelle ou vectorielle), énoncé sans preuve du théorème de continuité globale d'une intégrale à paramètre.
6. Énoncé (sans preuve) du théorème de la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, et classe $\mathcal{C}^\infty$ et expression intégrale de la dérivée n-ième de la fonction Γ.

Énoncé des exercices de la banque CCINP à préparer

Exercice – (Banque CCINP n° 8)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
   (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

(b) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

Exercice – (Banque CCINP n° 16)
On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice – (Banque CCINP n° 17)
Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

$$\left(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A\right)$$

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0;+\infty[$, $f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
   Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
   $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

Exercice – (Banque CCINP n° 48)
$C^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.

Exercice – (Banque CCINP n° 53)
On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
   On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
   $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

(c) $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice – (Banque CCINP n° 29)
On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\forall\, t\in\,]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall\, x \in\,]0,+\infty[$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma\,'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice – (Banque CCINP n° 30)

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E).

Exercice – (Banque CCINP n° 49)
Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.
On pose : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

   On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
2. (a) Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.
   En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$.
   (b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n\,t^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice – (Banque CCINP n° 50)
On considère la fonction $F : x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2\,t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x\longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

Prévisions pour la semaine suivante :

- Endomorphismes des espaces préhibertiens réels