Lycée Lakanal, Sceaux — 2024/2025
MP – Mathématiques
A. Troesch

Programme des colles de la semaine 15 (20/01 – 24/01)

Chapitre 11 : Intégrales à paramètre

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 29, 30, 49, 50

1. **Suites et séries d'intégrales**
   - Interversions limites/intégrales
     - Rappel : interversion limite/intégrale sur un segment par CVU
     - Extension au cas où les f_n et la limite f sont c.p.m.
     - Rappel : TCD
   - Intégration terme à terme
     - Rappel : théorème d'interversion somme/intégrale sur un segment par CVU
     - Théorème d'intégration terme à terme, cas positif (avec validité dans $\overline{\mathbb{R}}_+$). nbrThéorème admis.
     - Théorème d'intégration terme à terme, cas général. *Théorème admis*.
     - Possibilité d'utiliser le TCD sur les sommes partielles (cas particulier important : séries alternées).
2. **Intégrales à paramètre réel ou vectoriel**
   - Limite et continuité d'intégrales à paramètre
     - Théorème de convergence dominée, version continue réelle, version continue vectorielle pour $\lim\limits_{x\to a} \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$, où x est une variable dans un e.v.n. de dimension finie, I un intervalle, et f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
     - Continuité d'une intégrale à paramètre (même contexte vectoriel que ci-dessus) : ponctuel, global.
   - Dérivation d'une intégrale à paramètre réel
     - Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre réel
     - Théorème de la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre réel.
   - Fonction Gamma (HP classique)
     - Définition, domaine de définition, identité remarquable, valeur aux entiers et en $\frac{1}{2}$ (en admettant la valeur de l'intégrale de Gauss, calculée lors d'un exemple précédent).
     - Continuité, dérivabilité, classe $\mathcal{C}^n$, expression intégrale des dérivées.
     - Variations, convexité
     - Comportement asymptotique : limites en 0, en $+\infty$, équivalent en 0.

Chapitre 12 : endomorphismes d'un espace euclidien

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 39, 76, 77, 79, 80, 81, 82, 63, 66, 68, 74, 78, 92.

(Cette semaine, seulement les exercices 32, 76, 77, 79, 80, 81, 82)

(Encore peu d'exercices traités en cours pour le moment sur les notions nouvelles – matrices orthogonales, endormophismes auto-adjoints – notamment en début de semaine. On pourra donner des exercices portant sur le cours de première année sur les espaces préhilbertiens réels)

1. **Rappels sur les espaces euclidiens**
   - Formes bilinéaires et produits scalaires
     - Définitions générales
     - Représentation matricielle, formule de changement de base pour une forme bilinéaire
     - Espace préhilbertien réel, espace euclidien.
   - Orthogonalité

* Définitions
* Liberté des familles orthogonales sans 0, b.o.n.
* Existence d'une b.o.n. en dimension finie, thm de la b.o.n. incomplète.
* Des sous-espaces 2 à 2 orthogonaux sont en somme directe.

- Projection orthogonale
  * Projeté orthogonal, c'est un projecteur.
  * caractérisation par l'orthogonalité de l'image et du noyau.
- Coordonnées en b.o.n.
  * Expression des coordonnées en b.o.n.
  * Expression du produit scalaire et de la norme en b.o.n., expression matricielle.
  * Matrice d'un endomorphisme en b.o.n.
- Changements de base orthonormales, matrices orthogonales
  * Matrices orthogonales, inverse d'une matrice orthogonale.
  * Caractérisation des matrices orthogonales par leurs colonnes, leurs lignes.
  * Les matrices de passage entre deux b.o.n. sont orthogonales. Réciproquement, si $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{C}$ est une b.o.n., alors l'autre base aussi.
  * Groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Déterminant d'une matrice orthogonale, groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.
- Orientation d'un espace
  * Définition des classes d'orientation de bases de E. Choisir une orientation revient à se donner une base de référence.
  * Caractérisation des b.o.n. ayant même orientation, égalité des fonctions $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}$ dans ce cas. Produit mixte.

3. **Endomorphismes auto-adjoints**
   - Adjoint d'un endomorphisme
     * Théorème de représentation de Riesz. Définition de l'adjoint u^* de u.
     * $u \in \mathcal{L}(E)$. Adjoint d'une composée, double-adjoint.
     * u^* stabilise les orthogonaux des sous-espaces stables par F.
     * Noyau et image de u^*, rang de u^*.
     * Représentation matricielle de u^* en b.o.n.
     * Comparaison des rangs, traces, déterminants, polynôme minimaux, polynômes caractéristiques, et spectres de u et u^*.
   - Endomorphismes auto-adjoints
     * Définition. La terminologie « endomorphisme symétrique » est tolérée, mais le programme stipule de privilégier la terminologie « endomorphisme auto-adjoint ».
     * Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable
     * Caractérisation des auto-adjoints par leur matrice en b.o.n.
     * Caractérisation des projecteurs auto-adjoints parmi tous les projecteurs
   - Théorème spectral
     * Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}(M) \neq \varnothing$. Démonstration faite en passant par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
     * Théorème spectral
     * Les matrices symétriques réelles sont orthogonalement diagonalisables. Un contre-exemple sur $\mathbb{C}$.
   - Endomorphismes auto-adjoints positifs
     * Définition par la positivité (resp. caractère défini positif) de la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \langle x, u(y)\rangle$.
     * Notations $S_n^+(E)$ (auto-adjoints positifs) et $S_n^{++}(E)$ (auto-adjoints définis positifs),
     * Caractérisation spectrale du caractère positif (resp. défini positif).
     * Traductions matricielles des points précédents. Notations $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(RR)$.

Liste des questions de cours à préparer.

Avertissement important : certains étudiants ne connaissent toujours pas parfaitement les hypothèses (ni parfois la conclusion) des différents théorèmes de régularité ou d'interversion relatifs aux intégrales à paramètres. L'effort de mémorisation sur ces hypothèses doit être accentué. Ce n'est pas le chapitre le plus difficile à maîtriser techniquement, loin de là, mais à condition de bien connaître ces hypothèses. C'est incontournable, et une mauvaise connaissance de ces hypothèses (et de même pour le chapitre précédent) peut vous faire rater les CCINP bêtement ! *Une mauvaise connaissance de ces énoncés sera sanctionnée plus sévèrement cette semaine.*

Rappel des méthodes d'apprentissage :

- Un cours s'apprend avec un stylo à la main, on ne peut pas apprendre correctement un cours si on ne réécrit pas, au moins certains points, soi-même à côté, sur un brouillon.
- Un énoncé est connu si on sait le reproduire avec toutes ses hypothèses précises, et la conclusion donnée sous forme exacte, pas seulement 5 secondes après avoir fermé son cours, mais aussi une heure après, une journée après, une semaine après etc. Cela nécessite des révisions fréquentes, pour consolider cette mémorisation.
- Une démonstration est connue et comprise si on est capable de la refaire soi-même sans son cours : pour chaque question de cours, faites cet effort de préparation chez vous, et recommencez tant que vous n'arivez pas à retrouver la preuve complète.
- La bonne connaissance du cours passe aussi par une connaissance globale : pour chaque chapitre, connaître les grandes parties abordées, et les définitions et théorèmes importants relatifs à chaque partie.

Sauf mention explicite du contraire, les démonstrations des différents résultats cités sont aussi demandées

1. Énoncés (sans preuve) des théorèmes d'intégration terme à terme, dans le cas positif, dans le cas général.
2. Énoncé et preuve du TCD, version continue (réelle ou vectorielle), énoncé sans preuve du théorème de continuité globale d'une intégrale à paramètre.
3. Énoncé (sans preuve) du théorème de la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, et classe $\mathcal{C}^\infty$ et expression intégrale de la dérivée n-ième de la fonction Γ.
4. Définition d'une matrice orthogonale. Si $\mathcal{B}$ est une b.o.n., $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est une matrice orthogonale ssi $\mathcal{C}$ est une b.o.n.
5. Théorème de représentation de Riesz (existence et unicité) et définition de l'endomorphisme u^* adjoint de u.
6. Image et noyau de u^*
7. Définition d'un endomorphisme auto-adjoint et caractérisation matricielle en b.o.n.
8. Le spectre d'une matrice symétrique réelle est non vide.
9. Théorème spectral, en admettant que $\mathrm{Sp}(u) \neq \varnothing$ pour $u \in S(E)$.
10. Caractérisation spectrale des éléments de $S^{++}(E)$.

Énoncé des exercices de la banque CCINP à préparer

Exercice – (Banque CCINP n° 39)

On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\ |\ )$ est un produit scalaire dans l^2.
   On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\ ||$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de l^2 dans $\mathbb{R}$.

3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^{\perp}$ (au sens de $(\,|\,)$).
   Comparer F et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Exercice – (Banque CCINP n° 76)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

Exercice – (Banque CCINP n° 77)
Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Exercice – (Banque CCINP n° 79)
Soit a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall\,(f,g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice – (Banque CCINP n° 80)
Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.
   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice – (Banque CCINP n° 81)
On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A,A') = \mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$, où $\mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.

3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.

4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice – (Banque CCINP n° 82)

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

Exercice – (Banque CCINP n° 29)

On pose : $\forall\, x \in]0, +\infty[,\ \forall\, t \in\ ]0, +\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall\, x \in\ ]0, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   On pose alors : $\forall\, x \in]0, +\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exercice – (Banque CCINP n° 30)

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
   (b) Résoudre (E).

Exercice – (Banque CCINP n° 49)

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0, +\infty[\,,\ f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

   On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.

   En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$.

   (b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n\,t^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice – (Banque CCINP n° 50)

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\,t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

Prévisions pour la semaine suivante :

- Endomorphismes des espaces préhibertiens réels, chapitre complet, y compris les isométries.