

Programme des colles de la semaine 17 (03/02 – 07/02)

Chapitre 12 : endomorphismes d'un espace euclidien

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 39, 76, 77, 79, 80, 81, 82, 63, 66, 68, 74, 78, 92.

Vous pouvez encore donner un exercice de révision sur ce chapitre, portant sur les endomorphismes auto-adjoints ou sur les isométries, mais plutôt en fin de colle.

Chapitre 13 : Séries entières

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 2, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 47, 51

1. Définitions, convergence

- Définition
 - * Notions de série entière, variable réelle, variable complexe ; conventions $\sum a_n x^n$ et $\sum a_n z^n$.
 - * Exemples
- Domaine de convergence, rayon de convergence
 - * Lemme d'Abel : si $(a_n r^n)$ est bornée, $\sum a_n z^n$ CVA pour tout $z \in \mathring{B}(0, r)$.
 - * Rayon de convergence R , description du domaine de CV en fonction de R , cas de CVA et DVG. Indétermination sur le cercle, vu au travers d'exemples.
 - * Règle de d'Alembert
 - * Théorèmes de comparaison des rayons de CV (par $\leq$, O, $\sim$)
 - * Comparaison des rayons de $\sum a_n z^n$ et de $\sum n a_n z^n$. Cas de $\sum F(n) a_n z^n$, où $F \in \mathbb{C}(X) \setminus \{0\}$.
- Opérations sur les séries entières
 - * Rayon d'une somme de deux séries de rayons R_a et R_b . Cas $R_a \neq R_b$. Exemple de non égalité dans le cas $R_a = R_b$.
 - * Produit de Cauchy de deux séries entières. Minoration du rayon.

2. Régularité de la somme d'une série entière

- Convergence uniforme
 - * Convergence uniforme sur $\overline{B}(0, r)$, pour tout $0 \leq r < R$
 - * Convergence uniforme sur $\overline{B}(0, R)$ si la série CVA sur le cercle de rayon R
 - * (HP) Convergence uniforme sur $[0, R]$ en cas de convergence en R ; pour les meilleurs étudiants, retenir le principe de cette démonstration par transformation d'Abel ne peut pas faire de mal !
- Continuité et limites
 - * Continuité de la somme S sur $\mathring{B}(0, R)$. Continuité sur $\overline{B}(0, R)$ en cas de convergence absolue sur le cercle.
 - * Théorème radial d'Abel (*démonstration HP, puisque reposant sur le point HP précédent*) : si $\sum a_n R^n$ converge, alors $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow R^-} \sum a_n R^n$ ($x \in \mathbb{R}$). Traduction radiale par rotation dans le cas complexe.
- Dérivation et classe $\mathcal{C}^\infty$.
 - * Rayon de convergence des séries dérivées.
 - * Classe $\mathcal{C}^1$ de la somme S d'une série entière, et expression de la dérivée terme à terme. Itération immédiate pour la classe $\mathcal{C}^\infty$.
 - * Dérivées de la somme géométrique, formule du binôme négatif.
 - * Dérivée de la série du logarithme, et (nouvelle) preuve du développement en série de $\ln(1+x)$.
 - * Expression des coefficients de $\sum a_n x^n$ en fonction des dérivées successives de la somme. Unicité du développement en série entière d'une fonction au voisinage d'un point.

- * Dérivabilité au bord (*HP sans vraiment l'être, jusqu'à moitié démontré dans le cadre des séries génératrices en probabilité*) : La convergence de la série et de la série dérivée en R entraîne la dérivabilité de la somme (et sa valeur) en R . Réciproquement (*démo HP*) si les coefficients sont positifs, la dérivabilité de la somme en R entraîne la convergence de la somme des dérivées.

3. Développements en séries entières

- Généralités sur les fonctions développables en séries entières
 - * Définition d'une fonction DSE au voisinage de 0.
 - * CN de régularité pour qu'une fonction soit DSE, unicité du DSE et expression des coefficients en fonction des dérivées.
 - * Somme et produit de fonctions DSE
- DSE de l'exponentielle
 - * Existence et unicité d'une solution DSE sur $\mathbb{R}$ tout entier de l'équation $f' = f$ et $f(0) = 1$. Définition de l'exponentielle réelle par cette propriété.
 - * Rappel non redémontré : la preuve de l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour une EDL d'ordre 1 nécessite uniquement l'existence d'une fonction vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.
 - * Conséquence : caractérisation de l'exponentielle comme étant l'unique fonction solution de ce problème de Cauchy.
 - * DSE de sin et cos. DSE de l'exponentielle complexe.
- DSE des fonctions usuelles
 - * DSE des fonctions définies par les expressions $\exp(z)$, $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{(1-z)^p}$, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{Arctan}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$).
Le coefficient binomial étendu $\binom{\alpha}{n}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, a été introduit à cette occasion.
 - * Toutes les autres fonctions doivent être retrouvées (notamment Arcsin et Arccos). Pas d'expression simplifiée avec les coefficients binomiaux usuels du DSE de $(1+x)^{\pm\frac{1}{2}}$ (mais c'est à savoir faire si nécessaire).

Chapitre 14 : Espaces probabilisés

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 101, 105, 107

PAS ENCORE D'EXERCICES CETTE SEMAINE, NI D'EXERCICE DE LA BANQUE CCINP.

1. Espaces probabilisés

- Tribus et espaces probabilisables
 - * Tribus : définition, propriétés, événements
 - * Langage probabiliste. SCE.
- Mesures de probabilité
 - * Définition. Espace probabilisé.
 - * Additivité finie, complémentation, croissance.
 - * Probabilité d'une union. Inégalité de Boole.
- Espaces probabilisés discrets
 - * Un espace probabilisé discret contient tout les singletons et $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ est sommable de somme 1. Dénombrabilité du support.
 - * Distribution (discrète) de probabilité.
 - * Mesure de probabilités définie par une distribution discrète. Réciproque si Ω est au plus dénombrable (i.e. détermination par une distribution discrète d'une probabilité sur un univers dénombrable)
 - * Exemple : cas d'un univers fini. Mesure uniforme. Formule de Laplace.

Liste des questions de cours à préparer.

Sauf mention explicite du contraire, les démonstrations des différents résultats cités sont aussi demandées

1. Définition d'une série entière, lemme d'Abel, et description du domaine de convergence (avec preuve pour le cas de CVA)
2. Étude de la convergence uniforme d'une série entière et de la continuité de sa somme. Énoncé du théorème radial d'Abel (sans preuve)
3. Classe $\mathcal{C}^\infty$ d'une série entière et expression des coefficients avec les dérivées de la somme.
4. Expression et calcul du DSE de $\exp$ (comme unique solution de $f' = f$ et $f(0) = 1$), de $(1+x)^\alpha$, et de $\text{Arctan}(x)$ (attention, n'oubliez pas de rajouter les signes qui alternent qui manquent dans le polycopié de cours).
5. Définition d'une tribu, d'une mesure de probabilités. Probabilité d'une union $\mathbb{P}(A \cup B)$ (avec preuve en supposant acquise la propriété d'additivité finie).
6. Définition d'un espace probabilisé discret, d'une distribution de probabilités discrète. Mesure de probabilité définie par une distribution discrète (avec preuve).

Énoncé des exercices de la banque CCINP à préparer

Exercice – (Banque CCINP n° 2)

On pose $f(x) = \frac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $] -r, r[$ (où $r > 0$).
Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.
On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Exprimer, pour tout entier p , en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.

(b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice – (Banque CCINP n° 15)

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X , puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X .
2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X .
3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

Exercice – (Banque CCINP n° 18)

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?

- (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D .
- (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

Exercice – (Banque CCINP n° 19)

1. (a) Justifier, oralement, à l'aide du théorème de dérivation terme à terme, que la somme d'une série entière de la variable réelle est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence.

Remarque : On pourra utiliser, sans le démontrer, que la série $\sum a_n x^n$ et la série $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.

- (b) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable réelle : $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$.
2. (a) Donner le développement en série entière à l'origine de la fonction de la variable complexe : $z \mapsto \frac{1}{1-z}$.
- (b) Rappeler le produit de Cauchy de deux séries entières.
- (c) En déduire le développement en série entière à l'origine, de la fonction de la variable complexe : $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}$.

Exercice – (Banque CCINP n° 20)

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

- (a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.
- (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$.
- (c) $\sum \cos n z^n$.

Exercice – (Banque CCINP n° 21)

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) z^n$?

Exercice – (Banque CCINP n° 22)

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$?

En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

Exercice – (Banque CCINP n° 23)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ ont le même rayon de convergence.
On le note R .

2. Démontrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $] -R, R[$.

Exercice – (Banque CCINP n° 24)

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.
- (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \operatorname{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0.$$

Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice – (Banque CCINP n° 47)

Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.
2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

Exercice – (Banque CCINP n° 51)

1. Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$ converge.

On se propose de calculer la somme de cette série.

2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n} (2n+1)}$.

Prévisions pour la semaine suivante :

- Espaces probabilisés
- Début des variables aléatoires (cours uniquement)