Programme des colles de la semaine 18 (10/02 – 14/02)

Chapitre 13 : Séries entières

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 2, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 47, 51

Repise du chapitre (plutôt en exercice CCINP ou en fin de colle)

Chapitre 14 : Espaces probabilisés

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 101, 105, 107

1. **Espaces probabilisés**
   - Tribus et espaces probabilisables
     - Tribus : définition, propriétés, événements
     - Langage probabiliste. SCE.
     - *On évitera tout exercice abstrait sur les tribus, qui sort de l'esprit du programme.*
   - Mesures de probabilité
     - Définition. Espace probabilisé.
     - Additivité finie, complémentation, croissance.
     - Probabilité d'une union. Inégalité de Boole.
   - Espaces probabilisés discrets
     - Un espace probabilisé discret contient tout les singletons et $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$ est sommable de somme 1. Dénombrabilité du support.
     - Distribution (discrète) de probabilité.
     - Mesure de probabilités définie par une distribution discrète. Réciproque si Ω est au plus dénombrable (*i.e.* détermination par une distribution discrète d'une probabilité sur un univers dénombrable)
     - Exemple : cas d'un univers fini. Mesure uniforme. Formule de Laplace.
   - Continuité monotone
     - Théorème de continuité monotone (probabilité d'une union croissante ou d'une intersection décroissante)
     - (HP) Limite supérieure et limite inférieure.
   - Événements négligeables, événements presque certains.
     - Définitions, et différentes variations terminologiques.
     - Union au plus dénombrable d'événements négligeables, intersection au plus dénombrable d'événements presque sûrs.
     - Systèmes quasi-complets d'événements (SQCE) : un système quasi-complet est par définition au plus dénombrable. Les parts peuvent être vides.
     - SQCE de parts non négligeables associée à un SCE
2. **Conditionnement et indépendance**
   - Probabiilités conditionnelles
     - $\mathbb{P}_B(A)$, ou $\mathbb{P}(B \mid A)$ lorsque $\mathbb{P}(B) > 0$.
     - C'est une mesure de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
   - Formules liées aux probabilités conditionnelles
     - Formule des probabilités totales (énoncée avec un SQCE)
     - Formule des probabilités composées

    * Formule de Bayes simple, formule de Bayes avec SQCE.
- Indépendance
    * Événements indépendants
    * Famille d'événements indépendants (ou mutuellement indépendants s'il peut y avoir ambiguïté)
    * Restriction d'une famille d'événements indépendants ; caractérisation par l'indépendance des sous-familles finies ; cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (caractérisation par l'indépendance de $A_1, \dots, A_n$ pour tout n).
    * Si A et B sont indépendants A et $\overline{B}$ aussi.
    * Une famille obtenue d'une famille d'événements indépendants en remplaçant certains de ces événements par leur complémentaire est encore constituée d'événements indépendants.

3. **Bilan des méthodes calcuatoires**
    - Démarche générale, traduction ensembliste de l'événement visé
    - Bilan des différentes méthodes envisageables pour les situations suivantes :
        * complémentation
        * Union (la formule du crible de Poincaré a été évoquée, mais est HP ; la rappeler si nécessaire)
        * Intersection
        * Expérience en plusieurs étapes avec discussion suivant l'issue de la première étape.

Chapitre 15 : Variables aléatoires

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 95, 96, 97, 98, 99, 100, 102, 103, 104, 106, 108, 109, 110, 110

PAS ENCORE D'EXERCICES CETTE SEMAINE. Les points qui suivent ne pourront cette semaine que faire l'objet de questions de cours, ou d'exercices de la base CCINP.

1. **Loi d'une variable alétoire discrète**
    - Généralités sur les variables aléatoires discrètes
        * Variable aléatoire discrète à valeurs dans E (définition via image réciproque des singletons)
        * Image réciproque de parties de E. Événements $\{X \in A\}$, $\{X = x\}$ (autres notations admises, $(X \in A)$ ou $[X \in A]$)
        * Variables aléatoires réelles discrètes, vecteurs aléatoires réels discrets. Événements $\{A \leqslant X \leqslant b\}$ et variantes.
        * Image $f(X)$ d'une variable aléatoire discrète. C'est encore une variable aléatoire discrète.
        * X et Y sont des variables aléatoires discrètes si et seulement si (X, Y) est une variable aléatoire discrète. Extension au cas d'un n-uplet.
        * Algèbre des v.a.r.d. sur Ω.
    - Loi d'une variable aléatoire discrète
        * $(\mathbb{P}(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est une distribution de probabilités sur E (ou sur $X(\Omega)$)
        * Définition de la loi $\mathbb{P}_X$ de X. Par définition, c'est une mesure de probabilités sur $(E, \mathcal{P}(E))$ (on peut aussi la définir sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ par corestriction).
        * Expression de $\mathbb{P}_X(A)$ en fonction de la ditribution de probabilité.
        * Variables de même loi. Notation $X \sim Y$.
    - Loi de $f(X)$.
        * $\mathbb{P}_{f(X)} = \mathbb{P}_X \circ \widehat{f^{-1}}$.
        * $X \sim Y \Longrightarrow f(X) \sim f(Y)$.
    - Loi d'un vecteur aléatoire réel discret
        * Lois marginales, loi conjointe.
        * Expression des lois marginales en fonction de la loi conjointe
        * Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.
    - Variables aléatoires indépendantes
        * Indépendance de deux variables aléatoires.

* Famille de variables indépendantes. Caractérisation par les sous-familles finies.
* Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $f(Y)$ aussi.
* Lemme des coalitions (pour une famille quelconque d'événements indépendants, un nombre quelconque de coalitions, chaque coalition étant finie).

Liste des questions de cours à préparer.

Sauf mention explicite du contraire, les démonstrations des différents résultats cités sont aussi demandées

1. Définition d'une tribu, d'une mesure de probabilités. Probabilité d'une union $\mathbb{P}(A \cup B)$ (avec preuve en supposant acquise la propriété d'additivité finie).
2. Définition d'un espace probabilisé discret, d'une distribution de probabilités discrète. Mesure de probabilité définie par une distribution discrète (avec preuve).
3. Propriété de continuité monotone d'une mesure de probabilité. Démonstration dans le cas d'une union.
4. Formule des probabilités totales (FPT), formule des pobabilités composées, formule de Bayes, avec démonstration de la FPT.
5. Définition de l'indépendance d'une famille d'événements. Indépendance de A et $\overline{B}$ lorsque A et B soient indépendants (avec preuve). Énoncé plus général (sans preuve).
6. Définition d'une variable aléatoire discrète (v.a.d.). (X, Y) est une v.a.d. ssi X et Y le sont.
7. Définition des lois marginales et loi conjointe d'un vecteur aléaoire. Expression des lois marginales.
8. Définition de l'indépendance d'une famille de variables aléatoires. Lemme des coalitions dans le cas de deux coalitions, pour une famille finie (on démontrera les deux lemmes).

Énoncé des exercices de la banque CCINP à préparer

Exercice – (Banque CCINP n° 101)
Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
   Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

Exercice – (Banque CCINP n° 105)

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice – (Banque CCINP n° 107)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice – (Banque CCINP n° 95)

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice – (Banque CCINP n° 109)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice – (Banque CCINP n° 23)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

Exercice – (Banque CCINP n° 24)

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$

   On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \operatorname{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 \ .$$

   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice – (Banque CCINP n° 47)
Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.
2. $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$

Exercice – (Banque CCINP n° 51)

1. Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.
2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.

Prévisions pour la semaine de reprise après les vacances :

- Variables aléatoires (en entier, sauf sans doute les inégalités) : loi, espérance, variance, covariance, séries génératrices, lois classiques.