

Programme des colles de la semaine 20 (10/03 – 14/03)

*C'EST LA DERNIÈRE SEMAINE DE COLLE.*

## Chapitre 15 : Variables aléatoires

Exercices de la banque CCINP associés au chapitre : 95, 96, 97, 98, 99, 100, 102, 103, 104, 106, 108, 109, 110, 111

### 1. Loi d'une variable aléatoire discrète

- Généralités sur les variables aléatoires discrètes
  - \* Variable aléatoire discrète à valeurs dans  $E$  (définition via image réciproque des singletons)
  - \* Image réciproque de parties de  $E$ . Événements  $\{X \in A\}$ ,  $\{X = x\}$  (autres notations admises,  $(X \in A)$  ou  $[X \in A]$ )
  - \* Variables aléatoires réelles discrètes, vecteurs aléatoires réels discrets. Événements  $\{A \leq X \leq b\}$  et variantes.
  - \* Image  $f(X)$  d'une variable aléatoire discrète. C'est encore une variable aléatoire discrète.
  - \*  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires discrètes si et seulement si  $(X, Y)$  est une variable aléatoire discrète. Extension au cas d'un  $n$ -uplet.
  - \* Algèbre des v.a.r.d. sur  $\Omega$ .
- Loi d'une variable aléatoire discrète
  - \*  $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est une distribution de probabilités sur  $E$  (ou sur  $X(\Omega)$ )
  - \* Définition de la loi  $\mathbb{P}_X$  de  $X$ . Par définition, c'est une mesure de probabilités sur  $(E, \mathcal{P}(E))$  (on peut aussi la définir sur  $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$  par corestriction).
  - \* Expression de  $\mathbb{P}_X(A)$  en fonction de la distribution de probabilité.
  - \* Variables de même loi. Notation  $X \sim Y$ .
- Loi de  $f(X)$ .
  - \*  $\mathbb{P}_{f(X)} = \mathbb{P}_X \circ \widehat{f^{-1}}$ .
  - \*  $X \sim Y \implies f(X) \sim f(Y)$ .
- Loi d'un vecteur aléatoire réel discret
  - \* Lois marginales, loi conjointe.
  - \* Expression des lois marginales en fonction de la loi conjointe
  - \* Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.
- Variables aléatoires indépendantes
  - \* Indépendance de deux variables aléatoires. Notation  $X \perp\!\!\!\perp Y$
  - \* Famille de variables indépendantes. Caractérisation par les sous-familles finies.
  - \* Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $f(X)$  et  $f(Y)$  aussi.
  - \* Lemme des coalitions (pour une famille quelconque d'événements indépendants, un nombre quelconque de coalitions, chaque coalition étant finie).
  - \* Théorème de consistance de Kolmogorov (admis) : existence d'un espace probabilisé dans lequel une suite de lois de probabilités discrètes est modélisée par une suite de variables indépendantes. Cas de vard iid. Espace probabilisé associé à une succession infinie de tirages à P ou F. Aucune question théorique à ce sujet.

### 2. Espérance et variance

- Espérance d'une variable discrète positive
  - \* Contexte :  $X$  à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ ,
  - \* Bonne définition de  $\mathbb{E}(X)$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ , avec la convention  $0 \times \infty = 0$  pour le cas de variables prenant la valeur  $\infty$  avec une probabilité nulle.

- \* Si  $\mathbb{P}(X = \infty) > 0$ , alors  $\mathbb{E}(X) = \infty$ . Existence de variables positives  $X$  à valeurs non infinies telles que  $\mathbb{E}(X) = +\infty$ .
- \*  $X \sim Y \implies \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$
- \* Positivité et cas d'égalité  $\mathbb{E}(X) = 0$  (toujours pour  $X \geq 0$ ).
- \* Expression de  $\mathbb{E}(X)$  comme somme des  $\mathbb{P}(X \geq n)$  lorsque  $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .
- Espérance d'une variable discrète complexe
  - \* Condition et valeur de  $\mathbb{E}(X)$  par sommabilité et somme de  $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  (ou de façon équivalente, de  $(x\mathbb{P}(X = x))_{x \in \mathbb{C}}$ ). Notation  $X \in L^1$ .
  - \* Avertissement : si  $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ , la convergence de la série  $\sum x_n \mathbb{P}(X = x_n)$  ne suffit pas. L'existence de l'espérance équivaut à sa CVA.
  - \* Existence et valeur de  $\mathbb{E}(X)$  ne dépendent que de la loi.
- Formule de transfert et conséquences
  - \* Formule de transfert positive dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  ( $f$  à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$ )
  - \* Formule de transfert pour  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  (avec CNS pour que  $X \in L^1$ ).
  - \* Moments d'ordre  $k$ , notation  $X \in L^k$ .
  - \* Explicitation de la formule de transfert pour une fonction de 2 variables, à l'aide de la loi conjointe.
  - \* Conséquences de la formule de transfert :
    - étude de l'existence de  $\mathbb{E}(X)$  par majoration de  $\mathbb{E}(|X|)$
    - Linéarité de  $\mathbb{E}$  : cas positif dans  $\overline{\mathbb{R}}$  ( $X \geq 0, Y \geq 0, \lambda > 0$ ), cas complexe (avec la condition suffisante  $X, Y \in L^1 \implies X + \lambda Y \in L^1$ ).
    - Positivité et croissance (pour  $X, Y$  réelles)
    - Espérance d'un produit de variables indépendantes
- Moment d'ordre 2 et variance
  - \* Contexte :  $X$  discrète à valeurs réelles.
  - \* Moment d'ordre 2, espace vectoriel des variables  $L^2$ .
  - \*  $L^2$  implique  $L^1$  (et plus généralement, mais c'est HP, si  $k_1 < k_2$ ,  $L^{k_2}$  implique  $L^{k_1}$ ).
  - \* Inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espérance, et condition d'égalité.
  - \* Variance, écart-type. Positivité et caractérisation des vards telles que  $\mathbb{V}(X) = 0$ .
  - \* Formule de König-Huygens (KH)
  - \* Variable centrée, variable réduite, variable centrée réduite  $X^*$  associée à  $X$  non quasi-certaine.
- Covariance
  - \* Définition, interprétation intuitive du signe.
  - \* Propriétés : c'est une forme bilinéaire symétrique, dont la forme quadratique associée est  $\mathbb{V}$ .
  - \* Formule de KH symétrisée :  $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ .
  - \* Variables décorréllées ; indépendantes implique décorréllées, réciproque fausse.
  - \* Inégalité de CS pour la covariance (apparemment pas explicitement au programme, mais se retrouve facilement avec la première inégalité de CS, donc pas de raison de s'en priver).
  - \* Formule de polarisation. Variance de la somme de 2 variables. Cas de variables indépendantes.
  - \* Généralisation à la variance de la somme de  $n$  variables aléatoires.

### 3. Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et lois usuelles

- Fonctions génératrices
  - \* Définition de la fonction génératrice  $G_X$  comme somme d'une série entière ; expression sous la forme  $\mathbb{E}(t^X)$ .
  - \* Propriétés liées à la convergence :  $R \geq 1$ , CVNVCN sur  $\overline{B}(0, 1)$ , classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\overset{\circ}{B}(0, 1)$ .
  - \* La fonction génératrice détermine la loi.
  - \* CNS d'existence et valeur de  $\mathbb{E}(X)$  en fonction de  $G_X$ .
  - \* CNS d'existence et valeur de  $\mathbb{E}(X(X-1))$  puis de  $\mathbb{V}(X)$  en fonction de  $G_X$ .
  - \* Fonction génératrice de  $X + Y$  lorsque  $X \perp\!\!\!\perp Y$ .
- Rappels sur les lois usuelles finies Pour chacune des lois suivantes, connaître l'expression de la loi, l'expérience-type associée, la valeur de l'espérance, de la variance, et *l'expression de la fonction génératrice*. L'espérance a été systématiquement (re)calculée avec la série génératrice, pour donner une

autre approche que celle de l'année dernière.

- \* Loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X \sim \mathcal{U}(n)$ .
- \* Loi de Bernoulli,  $X \sim \mathcal{B}(p)$  ou  $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ . Variable  $\mathbb{1}_A$ .
- \* Loi binomiale,  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .
- Loi géométrique
  - \* Expérience-type : temps d'attente
  - \* Expression de la loi. Notation  $X \sim \mathcal{G}(p)$ . Fonction génératrice.
  - \* Espérance et variance de  $X \sim \mathcal{G}(p)$  (par calcul direct et par la fonction génératrice)
- Loi de Poisson
  - \* Définition de la loi, fonction génératrice, espérance et variance (par calcul direct et par la fonction génératrice). Notation  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ .
  - \* Limite en loi de  $\mathcal{B}(n, p_n)$ , lorsque  $np_n \rightarrow \lambda$ . Modélisation de l'affluence à un événement rare (i.e. avec une faible probabilité de réalisation pour chaque individu d'une grande population).
- Stabilités
  - \* Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  et  $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$  et  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , alors  $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$ .
  - \* Si  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$  et  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , alors  $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .

#### 4. Inégalités en probabilités

- Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev
  - \* Inégalité de Markov pour  $X \in L^1$  positive
  - \* Reexpression quadratique de l'inégalité de Markov pour  $X \in L^2$ .
  - \* Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- Loi faible des grands nombres
  - \* (HP) Convergence en probabilités
  - \* Loi faible des grands nombres

## Chapitre 16 : Calcul différentiel

**Exercices de la banque CCINP associés au chapitre :** 3, 4, 34, 41, 52, 56, 57, 58.

Contexte général :

- $E$  est un  $RR$ -evn de dimension finie, et  $\Omega$  un ouvert de  $E$
- $F$  est un  $\mathbb{K}$ -evn de dimension finie ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ )
- $f : \Omega \rightarrow F$

*On posera uniquement des exercices très proches du cours pour ce chapitre, notamment pour les parties rajoutées en cours de semaine.*

#### 1. Compléments sur les fonctions vectorielles

- Extension des notations  $o$  et  $O$ 
  - \* Définition de  $f = o(g)$  et  $f = O(g)$ , pour  $f$  à valeurs vectorielles (NB : la variable est aussi vectorielle, et  $g$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ).
  - \* Cas  $o(\|x\|^\alpha)$  et  $(\|x\|^\alpha)$  : indépendance vis-à-vis de la norme ( $E$  étant de dimension finie)
  - \* Caractérisation par quotient
- Dérivation de fonctions vectorielles  $f$  d'une variable réelle.
  - \* Définition de la dérivabilité et du vecteur dérivé par taux d'accroissement.
  - \* Caractérisation coordonnée par coordonnée dans une base de  $F$ .
  - \* Opération sur les dérivées : linéarité, composition à la source. Dérivée de  $B(f, g)$ , et  $M(f_1, \dots, f_n)$  pour  $B$  bilinéaire et  $M$  multilinéaire (admis pour le moment, on le verra comme conséquence de la formule plus générale pour les différentielles).
  - \* Caractérisation par dérivées à droite et à gauche
  - \* Dérivable implique continu
  - \* Caractérisation par  $DL_1$ .
  - \* Dérivée de  $t \mapsto e^{At}$  (pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).
  - \* Caractérisation des fonctions constantes.

- \* Le vecteur  $f'(x_0)$  est tangent à la trajectoire et sa norme est égal à la vitesse instantanée.
- Fonctions de classe  $C^{\text{cal}^n}$ 
  - \* Définitions, caractérisation par les dérivées.
  - \* Règles opératoires (pour l'instant, pas encore Leibniz sur les formes bilinéaires).

## 2. Dérivées partielles et différentielles

- Dérivée selon un vecteur

*SEULEMENT À PARTIR DE MERCREDI, LE COURS SERA FAIT LUNDI*

- \* Fonctions partielles en un point  $a$
- \* Dérivée de  $f$  en  $a$  selon un vecteur  $u$ . Notation  $D_u f(a)$ .
- \* Exemple de fonction ayant en  $a$  des dérivées selon toutes les directions mais non continue en  $a$ .
- \* Dérivées partielles dans une base. Notation  $\partial_{\mathcal{B},k} f$  ou  $\partial_k f$  quand il n'y a pas d'ambiguïté.
- \* Cas où  $E = \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{B}$  est la base canonique. Notation  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ .
- \* Identification d'une fonction définie sur  $E$  à une fonction de  $n$  variables après avoir fixé une base, motivant l'abus de notation  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  dans ce contexte aussi.
- \* Un exemple de fonction ayant des dérivées partielles dans une base en  $a$ , mais pas dérivable en  $a$  selon toute direction.

- Différentielle

*SEULEMENT À PARTIR DE JEUDI, LE COURS SERA FAIT LUNDI ET/OU MARDI*

- \* Définition de la différentiabilité en un point et de la différentielle.
- \* Différentielle d'une fonction d'une variable réelle.
- \* Exemples de calculs de différentielle par DL
- \* Différentiable implique continu
- \* Rapport entre différentielle et dérivées directionnelles. Expression de la différentielle par les dérivées partielles dans une base.
- \* Jacobienne (a priori réservé aux dérivées partielles usuelles dans des  $\mathbb{R}^k$ )
- \* Différentielle d'une application constante, d'une application linéaire
- \* (HP mais bien pratique) Définition de  $\delta x_i$  comme différentielle de  $\pi_i : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ .

- Gradient

*SEULEMENT POUR LES COLLES DE VENDREDI, LE COURS SERA FAIT MERCREDI*

- \* Rappel du théorème de représentation de Riesz, définition du gradient d'une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , notation  $\nabla f(a)$ .
- \* Expression en base orthonormale.
- \* Le gradient est positivement colinéaire au vecteur selon lequel la dérivée directionnelle est maximale.

- Opérations sur les différentielles

*SEULEMENT POUR LES COLLES DE VENDREDI, LE COURS SERA FAIT MERCREDI*

- \* Linéarité de la différentiation.
- \* Différentielle de  $M(f_1, \dots, f_n)$  où  $M$  est multilinéaire.
- \* Cas d'une variable réelle : dérivée de  $M(f_1, \dots, f_n)$ . Exemples du produit scalaire, du déterminant, de  $L(f)$  pour  $L$  linéaire.
- \* Différentielle d'une composée.
- \* Dérivée le long d'un arc
- \* Règle de la chaîne, exprimé dans des bases quelconques. Dans le cas  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  ; réexpression avec les jacobiniennes.
- \* Différentielle d'une fonction à valeurs dans un produit cartésien.

## Liste des questions de cours à préparer.

*Sauf mention explicite du contraire, les démonstrations des différents résultats cités sont aussi demandées*

1. Formule de transfert (dans le cas complexe), y compris la CNS d'existence.

2. Linéarité de l'espérance (cas complexe)
3. Définition de la variance, de la covariance. Expression de  $\mathbb{V}(X + Y)$  (avec preuve), généralisation à  $n$  variable (sans preuve).
4. Définition de la fonction génératrice d'une variable à valeurs entières positives. Rayon de convergence et CVN sur  $\overline{B}(0, 1)$  (avec preuve), CNS d'existence et expression de  $\mathbb{E}(X)$  en fonction de  $G_X$  (sans preuve).
5. Fonction génératrice d'une somme de deux variables indépendantes.
6. Loi, fonction génératrice, espérance, et variance de  $X \sim \mathcal{U}(n)$ ,  $\mathcal{B}(p)$  et  $\mathcal{B}(n, p)$  (sans preuve, à part le calcul de la fonction génératrice de  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , et son utilisation pour le calcul de  $\mathbb{E}(X)$ ).
7. Loi, fonction génératrice, espérance et variance de  $X \sim \mathcal{G}(p)$  et  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Suivant la demande du colleur, on exposera le calcul de l'une ou l'autre des deux fonctions génératrices, et le calcul de l'espérance en se servant de la série génératrice.
8. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

## Énoncé des exercices de la banque CCINP à préparer

### Exercice – (Banque CCINP n° 95)

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.  
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.  
On note  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.  
On note  $Y$  le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
  - (a) Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
  - (b) Déterminer la loi de  $Y$ , son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
  - (a) Déterminer la loi de  $X$ .
  - (b) Déterminer la loi de  $Y$ .

### Exercice – (Banque CCINP n° 96)

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , de loi de probabilité donnée par :  $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = p_n$ .

La fonction génératrice de  $X$  est notée  $G_X$  et elle est définie par  $G_X(t) = E[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$ .

1. Prouver que l'intervalle  $] -1, 1[$  est inclus dans l'ensemble de définition de  $G_X$ .
2. Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .  
On pose  $S = X_1 + X_2$ .  
Démontrer que  $\forall t \in ] -1, 1[, G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$  :

- (a) en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
- (b) en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice.

**Remarque** : on admettra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à  $n$  variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On effectue  $n$  tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac.  
On note  $S_n$  la somme des numéros tirés.  
Soit  $t \in ] -1, 1[$ .  
Déterminer  $G_{S_n}(t)$  puis en déduire la loi de  $S_n$ .

**Exercice – (Banque CCINP n° 97)**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}^2$  dont la loi est donnée par :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, P((X, Y) = (j, k)) = \frac{(j+k) \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e j! k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .  
Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que  $E[2^{X+Y}]$  existe et la calculer.

**Exercice – (Banque CCINP n° 98)**

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers  $n$  correspondants distincts.

On admet que les  $n$  appels constituent  $n$  expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est  $p$  ( $p \in ]0, 1[$ ).

Soit  $X$  la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de  $X$ . Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des  $n-X$  correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

(a) Soit  $i \in ]0, n]$ . Déterminer, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P(Y = k | X = i)$ .

(b) Prouver que  $Z = X + Y$  suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

**Indication** : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante :  $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}$ .

(c) Déterminer l'espérance et la variance de  $Z$ .

**Exercice – (Banque CCINP n° 99)**

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit  $(Y_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, Y_n \in L^2$ .

On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ .

Prouver que :  $\forall a \in ]0, +\infty[, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$ .

3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

**Indication** : considérer la suite  $(Y_i)$  de variables aléatoires de Bernoulli où  $Y_i$  mesure l'issue du  $i^{\text{ème}}$  tirage.

**Exercice – (Banque CCINP n° 100)**

Soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ .

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ .

On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$ .

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $R$  définie par  $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ .
2. Calculer  $\lambda$ .
3. Prouver que  $X$  admet une espérance, puis la calculer.
4.  $X$  admet-elle une variance ? Justifier.

**Exercice – (Banque CCINP n° 102)**

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $q = 1 - p$ .

On considère  $N$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_N$  définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , indépendantes et de même loi géométrique de paramètre  $p$ .

1. Soit  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
Déterminer  $P(X_i \leq n)$ , puis  $P(X_i > n)$ .
2. On considère la variable aléatoire  $Y$  définie par  $Y = \min_{1 \leq i \leq N} (X_i)$   
c'est-à-dire  $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_N(\omega))$ , min désignant « le plus petit élément de ».  
(a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $P(Y > n)$ .  
En déduire  $P(Y \leq n)$ , puis  $P(Y = n)$ .  
(b) Reconnaître la loi de  $Y$ . En déduire  $E(Y)$ .

**Exercice – (Banque CCINP n° 103)**

**Remarque** : les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

1. (a) Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in ]0, +\infty[^2$ .  
Soit  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .  
On suppose que  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .  
Déterminer la loi de  $X_1 + X_2$ .  
(b) En déduire l'espérance et la variance de  $X_1 + X_2$ .
2. Soit  $p \in ]0, 1[$ . Soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ .  
Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .  
On suppose que  $Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .  
On suppose que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $(Y = m)$  est une loi binomiale de paramètre  $(m, p)$ .  
Déterminer la loi de  $X$ .

**Exercice – (Banque CCINP n° 104)**

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On dispose de  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.

On lance simultanément les  $n$  boules.

Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.

Chaque compartiment peut éventuellement contenir les  $n$  boules.

On note  $X$  la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par  $X$ .
2. (a) Déterminer la probabilité  $P(X = 2)$ .  
(b) Finir de déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
3. (a) Calculer  $E(X)$ .  
(b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)$ . Interpréter ce résultat.

**Exercice – (Banque CCINP n° 106)**

$X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

Elles suivent la même loi définie par :  $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$  où  $p \in ]0, 1[$  et  $q = 1 - p$ .

On considère alors les variables  $U$  et  $V$  définies par  $U = \sup(X, Y)$  et  $V = \inf(X, Y)$ .

1. Déterminer la loi du couple  $(U, V)$ .

- Déterminer la loi marginale de  $U$ .  
On admet que  $V(\Omega) = \mathbb{N}$  et que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P(V = n) = pq^{2n}(1+q)$ .
- Prouver que  $W = V + 1$  suit une loi géométrique.  
En déduire l'espérance de  $V$ .
- $U$  et  $V$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice – (Banque CCINP n° 108)**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .  
On suppose que la loi du couple  $(X, Y)$  est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{e 2^{i+1} j!}$$

- Déterminer les lois de  $X$  et de  $Y$ .
- (a) Prouver que  $1 + X$  suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de  $X$ .  
(b) Déterminer l'espérance et la variance de  $Y$ .
- Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
- Calculer  $P(X = Y)$ .

**Exercice – (Banque CCINP n° 109)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient  $n$  boules blanches numérotées de 1 à  $n$  et deux boules noires numérotées 1 et 2.  
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

On note  $Y$  la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

- Déterminer la loi de  $X$ .
- Déterminer la loi de  $Y$ .

**Exercice – (Banque CCINP n° 110)**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

- Soit  $X$  une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On considère la série entière  $\sum t^n P(X = n)$  de variable réelle  $t$ .

On note  $R_X$  son rayon de convergence.

- (a) Prouver que  $R_X \geq 1$ .

On pose  $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$  et on note  $D_{G_X}$  l'ensemble de définition de  $G_X$ .

Justifier que  $[-1, 1] \subset D_{G_X}$ .

Pour tout réel  $t$  fixé de  $[-1, 1]$ , exprimer  $G_X(t)$  sous forme d'une espérance.

- (b) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Exprimer, en justifiant la réponse,  $P(X = k)$  en fonction de  $G_X^{(k)}(0)$ .
- (a) On suppose que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .  
Déterminer  $D_{G_X}$  et, pour tout  $t \in D_{G_X}$ , calculer  $G_X(t)$ .  
(b) Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .  
Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de  $X + Y$ .

**Exercice – (Banque CCINP n° 111)**

On admet, dans cet exercice, que :  $\forall q \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x \in ]-1, 1[$ ,  $\sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$  converge et que  $\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} =$

$$\frac{1}{(1-x)^{q+1}}.$$

Soit  $p \in ]0, 1[$ .

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

On suppose que la loi de probabilité du couple  $(X, Y)$  est donnée par :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2, P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de  $Y$ .  
(b) Prouver que  $1 + Y$  suit une loi géométrique.  
(c) Déterminer l'espérance de  $Y$ .
3. Déterminer la loi de  $X$ .

### Exercice – (Banque CCINP n° 3)

1. On pose  $g(x) = e^{2x}$  et  $h(x) = \frac{1}{1+x}$ .  
Calculer, pour tout entier naturel  $k$ , la dérivée d'ordre  $k$  des fonctions  $g$  et  $h$  sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose  $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$ .  
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , la valeur de  $f^{(n)}(x)$ .
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

### Exercice – (banque CCINP n° 4)

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in ]a, b[$ .  
On suppose que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et que  $f$  est dérivable sur  $]a, x_0[$  et sur  $]x_0, b[$ .  
Démontrer que, si  $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ , alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ .
3. Prouver que l'implication : ( $f$  est dérivable en  $x_0$ )  $\implies$  ( $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ ) est fausse.  
**Indication :** on pourra considérer la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $g(0) = 0$ .

*Seulement à partir de mercredi :*

### Exercice – (Banque CCINP n° 33)

On pose :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  et  $f(0, 0) = 0$ .

1. Démontrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Démontrer que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .
3.  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ? Justifier.

*Seulement à partir de mercredi :*

### Exercice – (Banque CCINP n° 52)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On considère l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

1. Prouver que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .

2. (a) Justifier que le domaine de définition de  $f$  est bien  $\mathbb{R}^2$ .  
(b) Déterminer  $\alpha$  pour que  $f$  soit continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
3. Dans cette question, on suppose que  $\alpha = 0$ .
- (a) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et les calculer.
- (b) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  et donner leur valeur.
- (c)  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**C'est la dernière semaine de colle. Rendez-vous lors de la préparation des oraux pour la suite !**