Exercices pour préparer la rentrée
Indications et/ou réponses
MP

Alain TROESCH

Version du 5 juillet 2025

Table des matières

1 Exercices d'entraînement technique 2

2 Analyse et probabilités 38

3 Algèbre 53

1

Exercices d'entraînement technique

Ce chapitre propose un certain nombre d'exercices calculatoires, dont l'unique but est de vous entraîner au calcul, pour gagner en fiabilité et en rapidité. L'efficacité calculatoire est l'une des clés de la réussite aux concours, car elle permet de ne pas passer trop de temps sur les questions techniques tout en engrangeant les points correspondants. Cet entraînement vous sera de plus utile pour l'interrogation de la rentrée.

NB : Ne tenez pas compte des références précédant les exercices, qui sont des références personnelles m'aidant à retrouver les énoncés dans mes fichiers.

Notions ensemblistes

`[ens015]`

Indications ou solutions pour l'exercice 1.1 – Procéder par double-inclusion, ,en regardant élément par élément.

- Traduire l'appartenance de y à une image directe $f(A)$ se fait en se donnant un $x \in A$ tel que $f(x) = y$ (il y a donc à exploiter une quantification existancielle)
- Traduire l'appartenance de x à une image réciproque $f^{-1}(B)$ se fait en constatant que c'est par définition équivalent à $f(x) \in A$. Il n'y a donc pas de nouvel élément à considérer. Contrairement à l'image directe, il n'y a pas de quantification dans la définition de l'image récirpoque. C'est pour cette raison qu'il y a souvent moins de problèmes avec les images réciproques qu'avec les images directes. Par exemple, l'image directe d'une intersection nous ramène à un problème d'interversion entre $\forall$ (pour l'intersection) et $\exists$ (pour límage directe). C'est la raison profonde pour laquelle on n'a dans cette situation qu'une inclusion.
- Dans ce type de raisonnements toujours bien poser les éléments. C'est le fait de les poser qui les rend concrets et manipulables. On développe le cas de l'image récirpoaue directe d'une intersection.

  Soit $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$.

  Alors (on traduit l'appartenance à l'image réciproque) $f(x) \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

  Par conséquent (on traduit maintenant l'appartenance à une intersection), pour tout $i \in I$, $f(x) \in A_i$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(A_i)$. On en déduit que $f(x) \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

  Réciproquement, si $f(x) \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$, alors pour tout $i \in I$, $x \in f^{-1}(A_i)$ donc $f(x) \in A_i$, puis $f(x) \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

  Ainsi $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$.
- Je vous laisse adapter les autres. Pour un contre-exemple pour l'image directe d'une intersection, cherchez un exemple simple avce 2 ensembles, et choisissez bien l'image des éléments qui ne sont pas dans l'intersection.

Réels et complexes

[som035]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.2 – Intervertir les deux sommes pour se ramener à la formule du binôme. On trouve :

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{p} k^p = (m+1)^n.$$

Remarquer que cet argument permet de retrouver rapidement la relation de récurrence permettant de calculer de proche en proche les sommes de puissances d'entiers.

[som002]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.3 – Intervertir les deux sommes, afin de se ramener à des sommes classiques

[som016]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.4 –
De façon directe, en utilisant la somme des entiers, on est ramené à sommer un polynôme de degré 2 en i, qu'on peut exprimer en fonction de la somme $S_2(n)$ des carrés
En intervertissant d'abord les deux sommes, on a directement $S_2(n)$.
On donne l'égalité des deux expressions, et on isole $S_2(n)$.
Même chose pour la somme des cubes en partant de $\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} k^2$.

[comp008]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.5 – En factorisant, on fait apparaître une exponentielle. I ; faut juste discuter suivant le signe du terme par lequel on a factorisé.
Module : $\left|\frac{1}{\cos(\theta)}\right|$.
Argument : $-\theta + \varepsilon\pi$, où $\varepsilon = 0 si \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mod 2\pi$ et 1 si $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\mod 2\pi$.

[comp043]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.6 – Ecrire le numérateur et le dénominateur en forme trigonométrique.
partie réelle : 2^9, partie imaginaire : $-2^9\sqrt{3}$.

[comp044]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.7 – Reconnaître l'intervention d'exponentielles complexes et utiliser la technique de l'angle moitié.
Module $|\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)|$, argument $-\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$, selon le signe de la cotangente.

[comp073]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.8 – Introduire T_n, la somme alternée des termes impairs et considérer $S_n + \mathrm{i}\, T_n$.
Réponse : $(\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.
On peut ensuite essayer de voir si on peut exprimer la même somme avec un $\cos(2k\theta)$ en plus.

[comp003]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.9 –

1. Remarquer que $\Delta = -(10 + 5\,\mathrm{i})^2$ (se devine facilement, ou sinon, méthode de recherche algébrique d'une racine, un peu fastidieux ici). On a $z^2 = -2\,\mathrm{i}$ ou $z^2 = 5 - 12\,\mathrm{i}$, puis $z = 1 - \mathrm{i}$ ou $z = -1 + \mathrm{i}$ ou $z = 3 - 2\,\mathrm{i}$ ou $z = -3 + 2\,\mathrm{i}$.
2. Remarquer qu'on doit avoir $3z^2 + z + 1 = \mathrm{i}(z^2 + 2z + 2)$ ou $3z^2 + z + 1 = -\mathrm{i}(z^2 + 2z + 2)$, et que z est solution de la première équation si et seulement si $\overline{z}$ est solution de la deuxième (ce qui évite d'avoir à résoudre les 2).

On obtient, pour la première, $\Delta = (3+4\,\mathrm{i})^2$, puis $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$, et donc pour la deuxième $z_3 = -\,\mathrm{i}$ et $z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$.

[comp013]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.10 – Après avoir éliminé $z = 1$, se ramener à une équation $Z^n = 1$ par changement de variable, résoudre, puis réexprimer z, en simplifiant avec la technique de l'angle moitié.
Réponse : $-\,\mathrm{i}\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

[comp004]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.11 – À voir comme partie imaginaire d'une somme géométrique d'exponentielles. Solution :

$$\forall n \geqslant 2,\quad S_n = \frac{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

On obtient $\dfrac{2}{\pi}$;
Interpréter $\frac{S_n}{n}$ comme une somme de Riemann pour obtenir la limite sous forme intégrale.

[comp007]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.12 – Voir le sinus comme la partie imaginaire de l'exponentielle, et utiliser la formule du binôme, puis symétrisation des arguments.
Réponse : $2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$.

[comp014]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.13 – Linéariser $\sin^{2m}(t)$, puis encore transformation de produit en somme :

$$\sin^{2m}(t) = \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{k}\cos(2(m-k)t) + \frac{1}{4^m}\binom{2m}{m}.$$

Remarquer ensuite, par transformation d'un produit en somme, que sauf si $k = \ell$, pour tout k et ℓ positifs,

$$\int_0^{\pi} \cos(kt)\cos(\ell t)\ \mathrm{d}t = 0$$

Si $m > 0$, ne subsiste alors de la somme que le terme $k = 0$. On a à calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(2mt)\ \mathrm{d}t$, par linéarisation.
Réponse : $\dfrac{(-1)^m\pi}{4^m}$, valable aussi si $m = 0$.

[comp082]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.14 – (Calcul)

1. Mutiplier par le conjugué du dénominateur.
   Rép : $1 - \mathrm{i}$.
2. $\Delta = -13 + 8\,\mathrm{i}$.
   Recherche les racines carrées de Δ sous la forme $\delta = a + \mathrm{i}\,b$, en rajoutant aux deux équations d'identtification des parties réelles et imaginaires, l'équation obtenue sur les modules.
   Rép : $z = \frac{-2-\mathrm{i}\,\pm\delta}{2}$
3. Ici j est bien sûr la racine cubique de l'unité de partir imaginaire strictement positive. Ne surtout pas passer par la forme algébrique, cela complique beaucoup les choses. Multiplier par le conjuguer du dénominateur, en se souvenant que $\overline{j} = j^2$, et simplifier en utilisant les deux relations $j^3 = 1$ et $j^2 + j + 1 = 0$ Rép : $\dfrac{6}{7} - \dfrac{5}{7}j$, puis $\dfrac{17}{14} - \dfrac{5\sqrt{3}}{14}\,\mathrm{i}$
4. Ne pas chercher à se ramener à des formules de trigonométrie. Ça marcherait, mais c'est très lourd. Utiliser la méthode classique de linéarisation avec la formule d'Euler, puis la formule du binôme, puis regrouper les exponentielles conjuguées pour reformer des fonctions trigonométriques avec la formule d'Euler.
   Rép : $-\dfrac{1}{32}(\cos(6x) - 6\cos(4x) + 15\cos(2x) - 10)$.

5. On peut réécrire l'équation sous la forme :

$$(z-(1+\mathrm{i}))(\overline{z}-(1-\mathrm{i}))=4 \qquad \text{soit:} \qquad |z-(1+\mathrm{i})|^2=4.$$

Reconnaître un cercle !

6. Cette équation traduit le fait que z et $(1-\mathrm{i})$ sont colinéaires. Reconnaître une certaine droite.

[comp083]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.15 – (Calcul)

1. $(1+\mathrm{i})^3(\sqrt{3}+\mathrm{i})=-2(1+\sqrt{3})+2\,\mathrm{i}(\sqrt{3}-1)$.
   Reprendre le calcul sous forme exponentielle et utiliser les symétries du sinus :
$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$
2. $\Delta=(7+13\,\mathrm{i})-4(1+\mathrm{i})(2+60\,\mathrm{i})=112-66\,\mathrm{i}$.
   En chercher une racine sous forme algébrique.
$$x_1=7-2\,\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad x_2=3+5\,\mathrm{i}\,.$$
3. Déévelopper le numérateur à l'aide de la formule du binôme, développer le dénominateur, multiplier par son conjugué (en utilisant $\overline{j}=j^2$ et simplifier en utilisant $j^3=1et1+j+j^2=0$.
   Rép : $\dfrac{905-346j}{21}$
4. Linéariser avec les exponentielles (formule d'Euler) et la formule du binôme.
   Rép : $\dfrac{1}{2^6}(\cos(7x)+7\cos(5x)+21\cos(3x)+35\cos(x))$.
5. En enlevant le cas litigieux ou trivial $z=0$, traduire l'alignement par le fait qu'un certain quotient est réel, ce qu'on exprimera avec des conjugués. Travailler un peu cette égalité pour se ramener à $z=\overline{z}$ ou une expression quadratique qu'on essaiera de mettre sous la forme $|z-a|^2=r^2$.

   Rép : z est sur l'axe réel ou sur le cercle de centre -1 de rayon 1.

[comp084]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.16 – (Calcul)

1. Utiliser la forme trigonométrique (i.e. exponentielle). $(1+\mathrm{i})^{42}=2^{21}\,\mathrm{i}$ puis
$$(1+\mathrm{i})^{42}(\mathrm{i}-\sqrt{3})=2^{21}(-1-\mathrm{i}\sqrt{3}).$$
2. $\Delta=(1+4\,\mathrm{i})^2-20(\mathrm{i}-1)=5-12\,\mathrm{i}$.
   Une racine $\delta=a+\mathrm{i}\,b$ de Δ doit vérifier $a^2-b^2=5$ et $2ab=-12$, soit $ab=-6$. Cherchant parmi les diviseurs de 6 ceux qui vérifie cette propriété (c'est plus rapide que de se lancer dans la méthode générale en tenant compte de l'équation sur les modules).

   Rép : $z_1=-1+3\,\mathrm{i}$ et $z_2 2+\mathrm{i}$.
3. Simplifier en utilisant $j^2=-j-1$, ce qui permet de rabaisser le degré en j.

   Réponse : $-\frac{1}{3}(j+2)$
4. Méthode classique : $\cos(5x)=\mathrm{Re}((\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x))^5$ (Moivre) puis développer par la formule du binôme.

   Rép : $16\cos^5(x)-20\cos^3(x)+5\cos(x)$.
5. Traduire l'alignement par le fait qu'un certain quotient doit être réel et traduire cela par une certaine égalité entre un complexe et son conjugué. Factoriser pour obtenir des relations entre z et $\overline{z}$.

   Rép : union de la droite des réels, et de la droite des complexes de partie réelle égale à $-\frac{1}{2}$ (droite verticale).

[comp087]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.17 – (Calcul)

1. Utiliser la forme exponentielle et la périodicité de l'exponentielle complexe.
$$\left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{\mathrm{i}+1}\right)^{111} = 2^{55}(1+\mathrm{i}).$$

2. $\Delta = 15 - 8\,\mathrm{i} = (4-\mathrm{i})^2$.
On trouve cette dernière factorisation en cherchant a et b entiers tels que $2ab = -8$, donc $ab = -4$, et dont la différence des carrés est 15. Si on ne trouve pas de la sorte, on peut toujours employer la méthode systématique du cours, mais c'est un peu plus fastidieux.
On obtient alors les deux solutions :
$$z_1 = 3 + \mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad z_2 = -1 + 2\,\mathrm{i}\,.$$

3. On simplifie d'abord le dénominateur en utilisant $j^2 = -1 - j$,x3 puis on multiplie par le conjugué :
$$\frac{1+j}{(1+2j)(1+3j)} = -\frac{5+4j}{21}.$$

4. On écrit le sinus avec la formule d'Euler, puis on développe à l'aide de la formule du binôme :
$$\sin^5(x)\frac{1}{2^4}(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)).$$

5. L'équation nous dit quelque chose sur la partie réelle de $(1+\mathrm{i})z$. En déduire le lieu de z en effectuant une rotation.
Réponse : D est la droite d'équation $y = x - 1$.

Suites et séries

[sui151]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.18 – Écrire les exponentiations sous forme exponentielle, pour se ramener à un calcul d'équivalzent classique. Attention $(1+x)^\alpha - 1 \sim_0 \alpha x$ seulement si α est constant, ce qui n'est pas le cas ici.
Attention à bien partir de l'extérieur pour enchaîner les équivalents, car en général, on n'a pas $u_n \sim v_n \implies f(u_n) \sim f(v_n)$.

1. Réponse : 1
2. Réponse : 1
3. Réponse : e^{-2} si $\alpha = 2$, 1 si $\alpha < 2$, 0 si $\alpha > 2$.
4. Réponse : e.
5. Réponse : e.
6. Réponse : 1.

[sui143]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.19 – Étudier la convergence des suites définies par :

1. $u_n \to 1$
2. $u_n \to +\infty$
3. Avec Stirling :
   - $u_n \to 0$ si $|x| < \frac{1}{\alpha}$, où $\alpha = \dfrac{p^p}{q^q(p-q)^{1-q}}$.
   - $u_n \to +\infty$ si $x > \frac{1}{\alpha}$
   - $u_n \to \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\dfrac{p}{q(p-q)}}$ si $x = \frac{1}{\alpha}$

- (u_n) n'admet pas de limite sinon.

4. $u_n \to \frac{2}{e}$
5. $u_n \to 1$
6. $u_n \to e$
7. $u_n \to 1$.

[sui008]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.20 – Les deux premières sont du ressort des méthodes du cours. Pour les 3 suivantes, adapter la méthode de résolution des suites arithmético-géométriques : la situation linéaire (ou plutôt affine) permet de voir qu'une solution générale est somme d'une solution particulière et de la solution générale de la récurrence homogène associée. Rechercher une solution particulière polynomiale (du même degré que le second membre, en général).

1. $u_n = 2(3^n - 1)$
2. $v_n = (1-n)\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$
3. $w_n = 2^{n+1} - 2n - 1$.
4. $x_n = \lambda + \mu(-3)^n - \dfrac{n}{2}$, trouver λ et μ avec les CI.
5. seule la solution particulière change.

[sui058]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.21 –

1. Suite arithmético-géométrique qu'on explicite en translatant par le point fixe pour retrouver une suite géométrique. Cela traduit la linéarité de la situation, et comme souvent dans ce cas, la solution générale est somme d'une solution particulière (le point fixe) et de la solution générale de l'équation homogène.
   $u_n = -\frac{1}{2^{n-2}} + 10$, puis $\sum_{k=0}^{n} u_k = -8 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 10(n+1) \sim_{+\infty} 10n \longrightarrow +\infty$.
2. Explicitation de suite récurrente linéaire d'ordre 2, avec racine double.
   $u_n = 2^n$, puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = 2^{n+1} - 1 \longrightarrow +\infty$.
3. Explicitation de suite récurrente linéaire d'ordre 2, avec 2 racines simples.
   On obtient encore $u_n = 2^n$, puis même somme.

[sui072]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.22 – Technique standard d'étude d'une suite récurrente, sur un intervalle stable sur lequel la fonction est croissante (ici l'intervalle $\mathbb{R}_+$). La suite est alors monotone (récurrence pour propager l'inégalité initiale) et le sens de variation s'obtient en comparant $u_0 = a$ et $u_1 = f(a)$. Dans tous les cas, on a convergence vers le point fixe.
NB : une autre méthode d'étude consisterait ici à majorer directement $|u_{n+1} - \ell|$ en fonction de $|u_n - \ell|$ par l'IAF, où ℓ est l'unique point fixe.

[sui004]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.23 – Technique standard d'étude d'une suite récurrente, sur un intervalle stable sur lequel la fonction est décroissante (ici l'intervalle $\mathbb{R}_+$). On se ramène au cas d'une récurrence donnée par une fonction croissante en composant deux par deux, donc en considérant les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sur lesquelles on peu utiliser les techniques d'étude d'un exercice précédent. Attention, *a priori*, en cas de convergence de ces deux suites, la convergence ne se fait alors pas forcément vers un point fixe de f, mais vers un point fixe de $f \circ f$.
NB : une autre méthode d'étude consisterait ici à majorer directement $|u_{n+1} - \ell|$ en fonction de $|u_n - \ell|$ par l'IAF, où ℓ est l'unique point fixe.

[sui005]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.24 – Études à savoir faire. S'entraîner. Les réponses ci-dessous :

1. - si $u_0 \in [-\frac{3}{2}, 3]$, (u_n) croit vers 3.
   - si $u_0 \in [3, +\infty[$, (u_n) décroît vers 3.
2. Étudier (u_{2n}) et (u_{2n+1}) :
   - si $u_0 \in]0, \sqrt[3]{2}[$, $u_{2n} \to 0$ et $u_{2n+1} \to +\infty$
   - si $u_0 \in]\sqrt[3]{2}, +\infty[$, de même en inversant le rôle de (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
   - si $u_0 = \sqrt[3]{2}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, de valeur et donc de limite $\sqrt[3]{2}$.
3. Pas de point fixe, les seules limites possibles sont $-\infty$, $+\infty$ et 1. Vérifier que ce n'est pas le cas : (u_n) n'admet pas de limite.
4. - Si $u_0 \in]-\infty, -4[$, $u_n \to -\infty$.
   - Si $u_0 \in]0, \frac{4}{3}[$, $u_n \to 1$ (seul point fixe de $f \circ f$ dans l'intervalle fermé)
   - Si $u_0 \in]-4, 0[$, elle finit par dépasser 0 (sinon elle conevergerait sans point fixe). $u_n \to 1$ 1.
   - si $u_0 \in]\frac{4}{3}, 4[$, $(u_n) \to 1$.
   - si $u_0 \in]4, +\infty[$, $u_n \to -\infty$.
5. - Si $u_0 \in]-2, +\infty[$, alors $u_n \to 1$.
   - si $u_0 \in]-\infty, -5[$, $u_n \to 1$.
   - si $u_0 \in]-5, -2[$, on ne peut pas y rester, $u_n \to 1$, sauf si on tombe sur -5
6. Remarquer que $u_2 \in [0, 1]$, et que c'est un intervalle stable sur lequel f est décroissante. Procéder par la méthode usuelle (étude de (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

   Alternative plus rapide : justifier l'existence et l'unicité du point fixe ℓ, et pour $n \geqslant 2$, majorer $|u_{n+1} - \ell|$ en fonction de $|u_n - \ell|$ par l'IAF.

`[ser001]`

Indications ou solutions pour l'exercice 1.25 –

1. CV : $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
2. CV : $n^2 u_n \to 0$
3. CV : $u_n = o(\mathrm{e}^{-n})$ ou $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
4. DV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{n}$.
5. CV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$
6. DVG : $u_n \to \mathrm{e}$.
7. CV : $|u_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$
8. DV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n}$ (par quantité conjuguée)
9. CV : $n^2 u_n \to 0$, en mettant tout sous forme exponentielle et en étudiant les négligeabilités dans l'exposant).
10. CV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$
11. CV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$
12. CV : $n^{\frac{3}{2}} u_n \to 0$ (tout mettre sous forme exponentielle)
13. CV : $n^2 |u_n| \to 0$. Il est maladroit d'utiliser les séries alternées ici.
14. DVG : $(\sin(n))$ n'admet pas de limite.
15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a^{-n^\alpha} = \mathrm{e}^{-n^\alpha \ln a}, a > 0$. On distingue plusieurs cas :
    - Si $\alpha \leqslant 0$, DVG : $u_n \to 1$ ou $\frac{1}{a}$.
    - Si $\alpha > 0$ et $a > 1$: CV : $n^2 u_n \to 0$
    - Si $\alpha > 0$ et $a < 1$: DVG : $u_n \to +\infty$
    - Si $\alpha > 0$ et $a = 1$: DVG.
16. CV : $n^2 u_n \to 0$

17. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{\mathrm{e}}{a}$
    - Si $|a| < \mathrm{e}$: DVG (d'Alembert)
    - Si $|a| > \mathrm{e}$: CVA (d'Alembert)
    - Si $a = \mathrm{e}$: DV : $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ (Stirling)
    - Si $a = -\mathrm{e}$: CV (CSCSA)
18. CV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$, puis $n^{\frac{3}{2}} u_n \to 0$.
19. DV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$, par DL
20. CV : $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.
21. CV : $n^2 u_n \to 0$.

[ser083]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.26 –

1. CV : $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$
2. DVG : $u_n \to 1$
3. CV : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2^n}$
4. CV : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi^4}{n^4}$
5. CV : $n^2 u_n \to 0$
6. DV : $n u_n \to +\infty$
7. CVA : $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
8. CV : $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$
9. DV : $n u_n \to +\infty$
10. CV : $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{4^n \sqrt{\pi n}} = o\left(\frac{1}{4^n}\right)$ (Stirling).
    On peut aussi utiliser le critère de d'Alembert.
11. CV : $u_n \sim \mathrm{e}^{-n}$
12. CV : $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$
13. CV : $n^2 u_n \to 0$
14. DVG : écrire u_n sous forme exponentielle + Cesaro

[ser005]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.27 –

1. Former un DL du tg pour en trouver un équivalent
2. Comment relier cela à la série précédente ?

[ser012]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.28 –

1. SCV (série alternée, mq $x \mapsto \frac{1}{x-\sqrt{x}}$ est décroissante)
2. CVA ($n^2|u_n| \to 0$)
3. DV ($u_n \sim_{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$)
4. DVG !
5. SCV : DA $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, puis série altérnée + série absolument convergente.
6. SCV : $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n} + O\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$; SCV +CVA.

7. $u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$, puis séries alternées. CV.
8. CV : faire un DL à un ordre suffisant pour avoir CVA dans le o.
9. SCV : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
10. DV : $_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln(n)}$, CV + DV (comparaison série/intégrale).
11. DVG : $u_{2n} \to -1$
12. SCV : cdv $t = x - n\pi$, puis étudier la suite d'intégrales (série alternée). Pour l'étude de la CVA, après s'être ramené à l'intervalle $[0, \pi]$, minorer l'inntégrale en se restreignant à un intervalle sur lequel le sin est supérieur à $\frac{1}{2}$.

Régularité des fonctions d'une variable réelle

[cnt207]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.29 –

1. $f'(x) = \dfrac{6x}{(1-x^2)^2}$
2. $f'(x) = \dfrac{-5x^2+2x+5}{(1-x^2)^2}$
3. $f'(x) = \dfrac{-3x^2+2x+3}{(x^2-3x+2)^2}$
4. $f'(x) = \dfrac{-2x^2+2x+4}{(x^2+2)^2}\mathrm{e}^{\frac{2x-1}{x^2+1}}$
5. $f'(x) = \left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$
6. $f'(x) = -3\mathrm{e}^{3x\sin(\ln(x))}\sin(\mathrm{e}^{3x\sin(\ln(x))})\,(\sin(\ln(x)) + \cos(\ln(x)))$
7. $f'(x) = \dfrac{10x}{x^2+1}(\ln^3(x^2+1) - \ln(x^2+1))^4(3\ln^2(x^2+1) - 1)$
8. $f'(x) = \dfrac{2x\cos(x^2)(x+\ln(x)) - 9(1+\frac{1}{x})\sin(x^2)}{(x+\ln(x))^{10}}$.

[cnt033]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.30 –

1. $\forall x \in \mathbb{R},\quad f''(x) = (36x^3-2x+2+(9x^4-x^2+2x)(9x^2-1))\mathrm{e}^{3x^3-x} = (81x^6-18x^4+54x^3+x^2-4x+2)\mathrm{e}^{3x^3-x}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\quad f''(x) = \dfrac{-6x^3+18x}{(x^2+1)^3}$.
3. $D_f = \left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} - n\pi, \frac{\pi}{2} - n\pi\right[\right) \setminus \{0\}$.

$$\forall x \in D_f,\quad f''(x) = \left[\left(\frac{2\tan x - (1+\tan^2 x)x}{x^3}\right)^2 \cdot \left(\sin^2\frac{\tan x}{x^2} + \cos\frac{\tan x}{x^2}\right) - \frac{2x^2\tan^3 x - 4x\tan^2 x + (2x^2+6)\tan x - 4x}{x^4}\sin\frac{\tan x}{x^2}\right] \cdot \mathrm{e}^{\cos\frac{\tan x}{x^2}}.$$

4. $D_f =]\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\mathrm{e}})}, +\infty[$.

$$\forall x \in D_f,\quad f''(x) = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x\cdot\ln x} + \frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)} + \frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)\cdot\ln(\ln(\ln x))}\right) \cdot \frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)\cdot\ln(\ln(\ln x))}$$

[cnt078]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.31 –

- Leibniz. Rép : $(-1)^n(x-n)\mathrm{e}^{-x}$.
- Rép : $\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{(-1)^n n!}{\left(x+\frac{b}{a}\right)^{n+1}}$
- Décomposition en éléments simples ; Rép : $\dfrac{n!}{2}(-1)^n\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$
- Rép : $\dfrac{(x-a)^2(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-b)^n}+2n\dfrac{(x-a)(-1)^n(n-2)!}{(x-b)^{n-1}}+n(n-1)\dfrac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{(x-b)^{n-2}}$ pour $n\geqslant 3$.

[cnt121]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.32 – Vérifier la formule pour $n=1$, en revenant à la formule de dérivation d'une réciproque, c'est plus simple que de comparer à l'expression connue de la dérivée de Arctan. Puis récurrence, en utilisant une formule de trigonométrie.

[cnt213]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.33 –

1. - $D_f=]-\infty,\frac{1}{42}[$.
   - $f'(x)=\dfrac{42x^2-2x-42^2}{(1-42x)(42+x^2)}\sin\left(\ln\left(\dfrac{42+x^2}{1-42x}\right)\right)$
2. Par récurrence :
$$\forall x\in D_f,\quad f^{(n+1)}(x)=\frac{P_n'(x)Q(x)-(42+n)Q'(x)P_n(x)}{Q(x)^{42+n+1}}.$$
   En déduire P_{n+1} et Q_{n+1}, et contrôler le degré.
3. Ne pas oublier l'asymptote verticale d'équation $x=0$.

   Asymptote en $+\infty$, par DA, ou bien de façon plus élémentaire en calculant $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis $\lim(f(x)-ax)$.

   Rép : $y=6x-42$
4. Formule de Leibniz puis expliciter les coefficients binomiaux et simplifier.

   Alternative plus rapide : calculer par un calcul direct $f^{(4)}$ qui a une expression très simple.

   Rép : $f^{(42)}(x)=\dfrac{42\cdot 38!}{x^{39}}$.

[cnt123]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.34 –

- sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.
- Attention au fait que le domaine est contitué de 2 intervalles : on primitive séparément sur chaque intervalle, avec une constante éventuellement différente ;

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{Arctan}(x)+\frac{\pi}{4} & \text{si } x<1\\ \operatorname{Arctan}(x)-\frac{3\pi}{4} & \text{si } x>1.\end{cases}$$

[cnt072]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.35 –

1. Solution $f(x)=\operatorname{Arctan}(x)+\frac{\pi}{4}$ sur $]-\infty,1]$, et $-\operatorname{Arctan}(x)+\frac{3\pi}{4}$ sur $[1,+\infty[$.
2. Solution $f(x)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{Arcsin}(x)$ sur $[-1,1[$
3. - Invariance par translation de $(2\pi,-\pi)$: étude sur un intervalle de longueur 2π, disons $[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$.
   - $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos(x)}{|\cos(x)|}-1\right)$ en tout $x\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
   - f constante de valeur $\frac{\pi}{4}$ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,
   - $f(x)=\frac{3\pi}{4}-x$.

4. $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(x)}{|\sin(x)|} - \dfrac{\cos(x)}{|\cos(x)|}\right)$. On obtient sur $[-\pi,\pi]$ (prolongé ensuite par périodicité) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ -\frac{\pi}{4} - x & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ -\frac{\pi}{4} & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -\frac{3\pi}{4} + x & \text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Études asymptotiques

[lim009]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.36 – Déterminer la limite de f en x_0 dans les cas suivants :

1. $-\frac{1}{2}$
2. $-\frac{25}{12}$
3. -5
4. $\frac{12}{33}$
5. 0
6. -2
7. e^2
8. $\frac{1}{2}$
9. e^2
10. $\frac{1}{2}$ (QC + équivalents)
11. $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$
12. $\frac{1}{8}$
13. 1
14. $\frac{5}{2}$
15. $\frac{1}{4}$
16. 1

[lim011]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.37 –

1. Rép : 0. Écrire la puissance de x sous forme exponentielle pour se ramener à des croissances comparées. Cela donne une limite finie pour ce terme.
2. Rép : 0. Faire le changement de variables $y = x - 2$ pour se ramener, par calcul d'équivalent, à une forme de croissances comparées $y\ln(y)$.
3. Rép : $+\infty$ si $\alpha <\leqslant \frac{1}{2}$, 0 si $\alpha > \frac{1}{2}$. Factoriser dans le logarithme par le terme prépondérant pour séparer en 2 et obtenir un équivalent ($\sqrt{x}\ln(x)$) du numérateur.
4. Rép : $+\infty$ si $\alpha \leqslant 1$, 0 si $\alpha > 1$. Tout mettre sous forme exponentielle, et détecter le terme prépondérant dans l'exposant.
5. Rép : 0. Par équivalents classiques.
6. Rép : 0. Par équivalents classiques puis croissances comparées.
7. Rép : $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. Tout écrire sous forme exponentielle, et utiliser des équivalents classiques.
8. Rép : $\frac{3}{2}\cdot 2^{\frac{1}{6}}$. Changement de variable $x = 2+y$, et factorrisation pour se ramener à des équivalents classiques.

[lim043]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.38 –

1. $+\infty$
2. $+\infty$
3. 0 si $\alpha > 1$, 1 si $\alpha = 1$, $+\infty$ si $\alpha < 1$.
4. 0
5. $+\infty$

1. $+\infty$
2. 0
3. $+\infty$
4. 0
5. 0

[lim005]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.39 –

1. $\frac{x}{2}$
2. $-\frac{x^2}{2}$
3. $x\ln(x)$
4. $\frac{x}{12}$
5. $\frac{1}{x^2}$
6. $\frac{a}{x\ln(x)}$
7. $\pi - x$
8. $\frac{(\pi-x)^2}{2}$
9. x
10. $\frac{a}{\mathrm{e}}\left(x - \frac{\mathrm{e}-b}{a}\right)$

[lim037]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.40 –

1. $-\infty$
2. $\frac{1}{2}$
3. 0
4. 0
5. $-\frac{6}{\pi}$
6. $\frac{1}{\pi}$
7. 0
8. 0
9. $\frac{\pi}{4}$
10. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$
11. 1
12. 0
13. -3
14. $\mathrm{e}\cos(\mathrm{e})$
15. 0
16. 1
17. 1
18. -2
19. $\frac{\pi}{8}$
20. $-\frac{1}{2}$
21. 0
22. 1
23. $\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$
24. $\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$
25. $\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{32}}$
26. e^2
27. 1
28. e
29. $\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$
30. $1/\mathrm{e}$
31. 1
32. $1/\mathrm{e}$
33. $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$
34. 1
35. 1
36. $\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$
37. $(2^4 \cdot 3^9)^{-\frac{4}{\pi}}$
38. e
39. 1
40. $+\infty$
41. e^2
42. 1
43. $1/\mathrm{e}$
44. e
45. $\sqrt{\mathrm{e}}$
46. 1.

[lim039]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.41 –

1. $-\ln(x)$ ($\mathrm{th}(x) \sim_{+\infty} 1$)
2. x (utiliser $\mathrm{sh}(x) \sim_{+\infty} \mathrm{e}^x$, mettre le terme prépondérant en facteur et couper le ln en 2)
3. $\ln(x)$
4. $\frac{5x}{12}$ (tout rentrer dans ln, pour se ramener à un équivalenbt classique ; puis un autre ; sommer avec o).
5. x (factoriser par le terme prépondérant dans le ln)
6. $\frac{x}{2}$ (tout grouper dans ln, utiliser équivalent du ln puis sommer équivalents de exp avec o).
7. $\frac{x}{\mathrm{e}}$ (éq du ln externe puis regrouper tout dans le même ln et à nouveau éq du ln)
8. x (vérifier que le deuxième terme est en $o(x)$, donc n'intervient pas).

9. $\sqrt[4]{x}$
10. $\frac{\sqrt{2}}{8} \cdot x$.
11. $\frac{x}{4} \cdot \frac{e^{\sqrt{\ln(2)}}}{\sqrt{\ln(2)}}$.
12. πx, aucune difficulté (enchaîner les équivalents en commençant par l'extérieur)
13. $\frac{ex^2}{4}$ (factoriser par e, utiliser l'éq de e, puis de la racine , puis du cos, en sommant avec o).
14. x
15. $-\frac{x^3}{2}$
16. $\frac{1}{2}(x-1)$ (se ramener à au taux d'accroissement)
17. $4(\ln(2)+1)(x-2)$ (factoriser pour utiliser un éq de exp, puis cdv $y = x+2$; mettre de côté un terme $y(ln(y+2))$, et pour le reste, regrouper les ln et éq ; on somme les éq avec o).
18. $(x-1)^2$ (factoriser par x, éq de l'exp, puis du ln).
19. x^{2x} (le deviner et former le quotient dont on calcule la limite en l'écrivant sous forme exponentielle ; ou alors, tout écrire au départ sous forme exponentielle, et développer l'exposant à $o(1)$ près, ce qui peut se faire ici uniquement avec la connaissance des équivalents)

`[tay001]`

Indications ou solutions pour l'exercice 1.42 –

Certains DL sont donnés à un ordre un peu plus élevé que demandé (si vous voulez vous entraîner en augmentant un peu la difficulté des calculs)

1. $\sin x \ \cos 2x = x - \dfrac{13}{6}x^3 + o(x^4)$
2. $e^{\sin 2x} = 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$
3. $\ln(1+\sin x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$.
4. Attention, pensez à sortir un facteur e, pour vous ramener à une composition par une expression **de limite nulle**.
   $e^{\cos x} = e - \dfrac{e}{2} \cdot x^2 o(x^3)$.
5. De même, mettez 2 en facteur dans la racine.
   $\sqrt{1+\cos(x)} = \sqrt{2}\left(1 - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{384}x^4\right) + o(x^4)$
6. Diviser numérateur et dénominateur par x^3 pour se ramener à un DL à élever à une puissance judicieuse.
   $\frac{x^3}{\sin^3 x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{17}{120}x^4 + o(x^5)$.
7. Commencer par $\frac{x}{\sin(x)}$ à un ordre augmenté de 1, puis diviser par x.
   $$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{7!} + o(x^6),$$
   puis :
   $$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = -\left(\frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5\right) + o(x^5).$$
8. $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5}{24}x^4 + \dfrac{61}{720}x^6 + o(x^6)$
9. Utiliser la π-périodicité de tan pour se ramener en 0.
   $$\tan(\pi e^x) = \pi x + \frac{\pi}{2}x^2 + \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^3}{3}\right)x^3 + \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi^3}{2}\right)x^4 + o(x^4).$$
10. Écrire sous forme exponentielle. Diviser l'exposant par x nécessite d'augmenter l'ordre de 1 avant cette division.
    $$(1 - x\sin x)^{\frac{1}{x}} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{3}{8}x^4 - \frac{7}{20}x^5 + o(x^5).$$

11. De même : $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right)$.
12. Mettre 4 en facteur, et sortir un facteur e^2 :
$$\mathrm{e}^{\sqrt{4+x}} = \mathrm{e}^2\left(1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{1536} + o(x^3)\right)$$
13. Du calcul ! Les étapes (tout est au voisinage de 0) :
    - $\sqrt{1+x-x^2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 - \frac{45}{128}x^4 + o(x^4)$.
    - $(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{3}u - \dfrac{1}{9}u^2 + 581u^3 + o(u^3)$
    - $(\cos x)^{\frac{1}{3}} = 1 - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{72} - \dfrac{43}{6480}x^6 + o(x^6)$
    - $\sqrt{1+x-x^2} - (\cos x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{11}{24}x^2 + \dfrac{5}{16}x^3 - \dfrac{389}{1152}x^4 - +o(x^4)$.
14. Séparer le ln en 2, développer d'abord par rapport à $\tan(x)$ pour faire quelques simplifications.
$$\ln\left(\frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right) = 2x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^5 + o(x^5).$$
15. On a $\sin x - \sin 5x = -4x + o(x)$, donc en divisant par x, on est ramené à une forme $\frac{1}{1-u}$. Ainsi, on peut écrire :
$$\frac{\cos x - \cos 5x}{\sin x - \sin 5x} = \frac{1}{x}(\cos x - \cos 5x)\cdot\frac{x}{\sin x - \sin 5x}.$$
Il faut donc aller jusqu'à l'ordre 6, avant de diviser par x. La fraction en sinus donne un terme constant non nul, donc il faudra bien aller à l'ordre 6 pour les cosinus. En revanche, les termes constant des cosinus se compensent, et le premier terme non nul dans la différence des cosinus est un terme en x^2. Ainsi, il suffira d'aller à l'ordre 4 pour la fraction des sinus. Comme on divise la différence des sinus par x, il faut aller à l'ordre 5 pour les sinus. On obtient :
    - $ds\frac{x}{\sin x - \sin 5x} = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{31}{6}x^2 + \frac{7267}{360}x^4 + o(x^4)\right)$
    - $\cos x - \cos 5x = 12x^2 - 26x^4 + \dfrac{217}{10}x^6 + o(x^6)$
    - $(\cos x - \cos 5x)\cdot\dfrac{x}{\sin x - \sin 5x} = -3x^2 - 9x^4 - \dfrac{519}{10}x^6 + o(x^6)$
    - $\dfrac{\cos x - \cos 5x}{\sin x - \sin 5x} = -3x - 9x^3 - \dfrac{519}{10}x^5 + o(x^5)$.
16.
    - $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2^3} + \dfrac{x^3}{2^4} + o(x^3)$.
    - $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{x}{2^3} - \dfrac{5}{2^7}x^2 + \dfrac{21}{2^{10}}x^3 + o(x^3)\right)$
    - $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} = \sqrt{1+\sqrt{2}}\cdot\left(1 + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2^4}x - \dfrac{13-12\sqrt{2}}{2^8}x^2 + \dfrac{124-69\sqrt{2}}{2^{12}}x^3 + o(x^3)\right)$

[tay005]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.43 –

1. $\dfrac{1}{\cos(\sin x)} = 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4 - \dfrac{23}{720}x^6 + o(x^6)$
2. Simplifier d'abord l'expression en sortant le carré et l'inversion du ln !
$\ln\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{6}x^4 + \dfrac{2}{45}x^6 + o(x^6)$
3. $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\sin x}{x}}}{\sqrt{1+\sin x}} = \mathrm{e}\left(1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{24}x^2 - \dfrac{7}{48}x^3\right) + o(x^3)$.
4. Comme en 2, simplifier d'abord l'expression en sortant la racine du logarithme !
$\ln(\sqrt{3+x}) - \sqrt[3]{1+x} = \dfrac{\ln 3}{2} - 1 - \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{12}x^2 - \dfrac{1}{18}x^3 + \dfrac{77}{1944}x^4 + o(x^4)$.

[tay031]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.44 –

1. Dériver : $f'(x) = -\dfrac{2}{1+4x^2}$. On obtient : $f(x) = \operatorname{Arctan}(2) - 2x + \dfrac{8}{3}x^3 - \dfrac{32}{5}x^5 + \dfrac{128}{7}x^7 + o(x^8)$.
2. $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{56}{27}x^3 + o(x^3)\right)$ puis primitiver.
3. Exprimer d'abord le DL de $\operatorname{Arcsin}(x)$ (en dérivant), puis composer et ne pas craindre les calculs. Calculer séparément les DL des puissances de $\operatorname{Arcsin}(x)$ (en multipliant à chaque fois le résultat par $\operatorname{Arcsin}(x)$). Être ordonné et soigneux dans les calculs. Sans garantie :
$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{11}{60}x^5 - \frac{583}{5040}x^7 + o(x^8).$$
4. Multiplier par x et dériver. Un peu de calcul et :
$$f(x) = -\sqrt{3}\left(\frac{2}{9} - \frac{23}{405}x^2 + o(x^3)\right)$$
5. Dériver $xf(x)$, puis faire un peu de calcul. J'obtiens :
$$f(x) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{x^2}{90} - \frac{169x^4}{63000} + o(x^5)\right).$$
6. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{19}{162}x^9 + \frac{41}{330}x^{11} + o(x^{11})$.

`[tay095]`
Indications ou solutions pour l'exercice 1.45 –

1. $\mathrm{e}\left(1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{48}x^3 + o(x^3)\right)$
2. Justifier l'existence d'un DL par étude de la régularité et Taylor-Young. Rechercher ce DL sous la forme $g(x) = ax + bx^2 + o(x^2)$ (pourquoi pas de terme constant ?), et identifier le DL de $g \circ f_2$ à celui de id.
Rép : $g(x) = \dfrac{2x}{\mathrm{e}} = o(x^2)$
3. DL puis théorème de la classe $\mathcal{C}^n$ par prolongement.
4. Développement asymptotique au voisinage de $+\infty$:
$$\frac{(x^3+2)\left(1 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^2 + x - 1} = x - 2 + 3 \cdot frac1x + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
Rép : asymptote $y = x - 2$ en $+\infty$, et courbe au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ (par étude du signe du terme suivant dans le DA).

`[tay002]`
Indications ou solutions pour l'exercice 1.46 –

1. Poser $y = x - 1$, puis DL à l'ordre 2. Attention à sortir un terme e pour le DL de exp en 1 !
Réponse : $\dfrac{\mathrm{e}(2-\mathrm{e})}{2}(x-1)^2$.
2. Poser $y = x - \mathrm{e}$. Attention à sortir les constantes de l'exponentielle pour faire les compositions.
Réponse : $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{e}-1}(x-\mathrm{e})^2$.
3. Factoriser par $\sqrt{x}$ puis utiliser un équivalent classique. Terminer en utilisant un DL du sinus.
Réponse : $\frac{x^{\frac{5}{2}}}{12}$
4. Factoriser par x^x puis utiliser un équivalent classique. On se retrouve à devoir faire un DA de $\ln(\sin(x))$. Pour cela développer $\sin(x)$, mettre x en facteur, et le sortie additivement du ln.
Réponse : $\dfrac{x^{3+x}\ln x}{6}$.

5. Par mise en facteur, et utilisation d'équivalents classiques, se ramener d'abord à

$$(\tan x)^x - x^{\tan x} \underset{0}{\sim} x \ln \tan x - \tan x \ln x.$$

Développer ensuite $\ln(\tan(x))$, comme dans la question précédente, en sortant un terme $\ln(x)$. On obtient :

$$(\tan x)^x - x^{\tan x} \underset{0}{\sim} -\frac{x^3 \ln x}{3}$$

Faire de même pour le dénominateur.

Réponse : limite (donc aussi équivalent) : -1.

6. Compositions de DL sans difficulté, il faut juste savoir à quel ordre aller (après quelques essais : l'ordre 7) :

$$\operatorname{sh}(\sin x) = x - \frac{x^5}{15} + \frac{x^7}{90} + o(x^7) \qquad \text{et} \qquad \sin(\operatorname{sh}(x)) = x - \frac{x^5}{15} - \frac{x^7}{90} + o(x^7).$$

Réponse : $\frac{x^7}{45}$.

7. On s'en sort simplement en enchaînant les équivalents.

Réponse : $\frac{x^3}{2}$.

8. Utiliser $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} y \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{y}$ (obtenu en composant le terme de gauche par tan et en utilisant un équivalent de tan).

Réponse : $-\sqrt{x}$.

[tay071]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.47 – Comme les exposants ne sont pas des constantes, bien penser à écrire les exponentiations sous forme exponentielle.

Rép : e ; $\mathrm{e}^{1/3}$; $\mathrm{e}^{2/15}$; $\frac{1}{4}$.

Intégration

[int044]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.48 – Par thérème des sommes de Riemann (en passant d'abord au logarithme pour la b).

Réponses

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{3} - 1$.
2. $\displaystyle\exp\left(\int_0^1 \ln(1+x^2)\right) = \frac{2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^2}$.

   Pour le calcul de l'intégrale, faire une IPP.
3. $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$ (IPP).

[int005]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.49 –

1. Primitivation à vue.

   Solution : $F(x) = \ln x + \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$, sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Primitivation à vue $u'u^{-\frac{1}{3}}$

   Solution : $F(x) = \frac{3}{2}(\operatorname{Arctan} x)^{\frac{2}{3}} + C$, sur $\mathbb{R}_+^*$ (éventuellement sur $\mathbb{R}_-^*$)
3. Primitivation à vue $\frac{u'}{u}$

   Solution : $F(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + C$, sur $\mathbb{R}$.

4. Primitivation à vue, $\frac{u'}{u}$
   Solution : $F(x) = \ln(|\ln x|) + C$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Primitivation à vue $u' \sin(u)$
   Solution : $F(x) = -\cos(e^x) + C$ sur $\mathbb{R}$
6. cdv $x = e^y$: on est ramené au 8.
   Solution : $F(x) = \dfrac{x}{2}(\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x))) + C$.
7. Sortir la racine de ln puis IPP très simple.
   Solution : $F(x) = \dfrac{1}{6}\left((x^3-1)\ln(1-x) - (\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x)\right) + C$
8. 2 IPP, ou alors écrire $f(x) = \mathrm{Im}(e^{(1+i)x})$, et primitiver dans $\mathbb{C}$. Solution : $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin(x) - \cos(x)) + C$
9. Se débarasser du x dans une intégration $u'u^{\frac{1}{2}}$, puis mise sous forme canonique et changement de variable en sh. Autre possibilité : intégration par partie, pour se ramener (après inévitable mise sous forme canonique) à la dérivée de Argsh. Dans les deux cas, on est amené à exprimer le résultat à l'aide de la fonction Argsh.
   Solution : $F(x) = \dfrac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{8}(2x+1)\sqrt{x^2+x+1} - \dfrac{3}{16}\mathrm{Argsh}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$
10. Primitivation à vue $u' \tan'(u)$

    Solution : $F(x) = \tan(\ln x) + C$.
11. Primitivation à vue $\frac{u'}{u}$
    Solution : $F(x) = \ln(e^x + e^{-x}) + C$
    On peut aussi reconnaître $\mathrm{th}(x)$ et primitiver sous la forme $\ln(\mathrm{ch}(x)) + C$.
12. DES sous la forme $\frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$.
    Solution : $b = 3$, $a = -2$, d'où :
    $F(x) = 3\ln|x+3| - 2\ln|x+2| + C$, sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$, $]2, 3[$, $]3, +\infty[$.
13. DES : $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$.
    Solution : $F(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - \ln|x| + 3\ln|x-1| + \ln|x+1| + C$, sur chaque intervalle $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$, $]1, +\infty[$.
14. DES : $f(x) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+1}$.
    Solution : $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln|x-1| - \dfrac{1}{4}\ln|x+1| - \dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}\, x + C$ sur $]-\infty, -1[$, $]1, -1[$ ou $]1, +\infty[$.
15. Constatez que la dérivée de $x \mapsto \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x}$ est $x \mapsto \frac{-1}{1+x^2}$, d'où primitivation à vue.
    Solution : $F(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{x}\right)^2 + C$, sur $\mathbb{R}_-^*$, ou $\mathbb{R}_+^*$.
16. 2 IPP.
    Solution : $F(x) = \dfrac{1}{2}(\sin(x)\mathrm{ch}(x) - \cos(x)\mathrm{sh}(x)) + C$
17. IPP puis DES. On peut éviter la DES par le cdv $y = x^2$
    Solution : $F(x) = \dfrac{x^3}{3}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{1}{3}\ln(1-x^2)$. Pas besoin de valeurs absolues ici, vu le domaine de définition de la fonction initiale.
18. DES : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x+1}{1+x+x^2}$, puis :
    Solution : $F(x) = \ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\right) + C$, sur $\mathbb{R}_-^*$, ou $\mathbb{R}_+^*$.
19. cdv $y = \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$, soit $x = \varphi(y)$, avec $\varphi : y \mapsto \frac{1-3y^2}{y^2-1}$. Faire le cdv sans calculer φ', et faire suivre d'une IPP pour revenir à φ, ou mieux, à φ plus une constante, de sorte à se ramener à un numérateur constant ! On est alors ramené à la question 14. On peut même encore mieux choisir la constante de sorte à ce que le numérateur ne soit pas constant, mais un multiple de y^2+1, pour se simplifier avec ce terme dans l'intégrale (prendre $\varphi(y) + 2$).

Solution : $F(x) = (x+2)\,\mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)$

20. CDV $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ puis IPP

    Solution : $F(x) = \frac{2y}{1-y^2} + \ln|1-y| - \ln|1+y| + C$, avec $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

21. IPP
    Solution : $F(x) = -\dfrac{1+\ln x}{x} + C$.

22. Exprimer sous la forme $\sin(x)P(\cos(x))$ puis primitiver à vue (ou cdv $y = \cos(x)$)
    Solution : $F(x) = -\dfrac{1}{3}\cos^3 x + \dfrac{1}{5}\cos^5 x + C,$ sur $\mathbb{R}$.

23. Tout exprimer avec sin puis linéarisation. On peut éviter la linéarisation en baissant le degré de sin petit à petit par IPP (voir intégrales de Wallis).
    Solution : $F(x) = \dfrac{t}{16} - \dfrac{\sin 2x}{64} - \dfrac{\sin 4x}{64} + \dfrac{\sin 6x}{192} + C$

24. IPP puis cdv $y = \sqrt{x^2-1}$, soit $y^2+1 = x^2$ (et en particulier, $y\ \mathrm{d}y = x\ \mathrm{d}x$).
    Solution : $F(x) = \dfrac{x^4}{4}\mathrm{Arcsin}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{12}\sqrt{x^2-1}(x^2+3) + C$

25. cdv $y = \sqrt{\tan x}$, donc $x = \mathrm{Arctan}(y^2)$. On est ramené à $\int \frac{2y^2}{1+y^4}\ \mathrm{d}y$ puis DES :

$$\frac{x/\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{x/\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}.$$

    Solution : $F(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{y^2-\sqrt{2}y+1}{y^2+\sqrt{2}y+1} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big(\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}y-1) + \mathrm{Arctan}(\sqrt{2}y+1)\Big) + C$, où $y = \sqrt{\tan(x)}$

26. CDV $y = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$, $x = \ln(1+y^2)$. On est ramené à $\int \frac{2y^2}{1+y^2}\ \mathrm{d}y$.
    Solution : $F(x) = 2\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - 2\,\mathrm{Arctan}\sqrt{e^x-1} + C$.

27. IPP.
    Solution : $F(x) = x\mathrm{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2} + C$.

[int006]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.50 – Merci de me signaler toute erreur. On donne à chaque fois UNE primitive. Rajouter une fonction localement constante pour les trouver toutes.

Principe général : pour les fractions rationnelles en sin, cos, sauf si on « voit » une primitive (forme u' f(u), ou dérivée de tan ou cotan), essayer un CDV $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$ ou $y = \tan(x)$. Pour savoir si c'est possible, chercher s'il est possible de mettre l'expression sous la forme $\cos(x)f(\sin(x))$, $\sin(x)f(\cos(x))$, ou $f(\tan(x))$, en utilisant la formule remarquable $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Il existe une règle toute faite pour savoir si l'un de ces CDV convient (règles de Bioche), mais personnellement, je ne les aime pas du tout, car elles incitent à ne pas réfléchir, alors que le bon changement de variable se détecte souvent facilement.

Si aucun de ces changements de variable ne convient, on peut se ramener au CDV $y = \tan\frac{x}{2}$ qui lui fonctionne toujours (on sait exprimer $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ de façon rationnelle en fonction de y, ainsi, que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ (dérivée d'une arctangeante). Mais c'est souvent très calculatoire, donc si l'un des CDV précédents est possible, le préférer !

Pour les fractions rationnelles en ch, sh et th : même principe, ou alors, exprimer avec des exponentielles.

1. Transformer les cos sauf 1 un sin.
   Réponse : $\ln|\sin x| - \dfrac{1}{2}\sin^2 x$
2. CDV $u = \cos x$ puis DES.
   Réponse : $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\cos x - \sqrt{2}| - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\cos x + \sqrt{2}|$.
3. CDV $y = \cos x$. DES par rapport à $z = y^2$, IPP, puis terminer DES par rapport à y. Réponse : $\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}\right) - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{4}\mathrm{Arctan}\cos x$
4. Changement de variable $t = \tan x$, puis discussion. Réponse :

- Si $\alpha=\beta=0$, ce n'est pas défini ;
- Si $\alpha=0$, $\beta\neq 0$, $-\frac{1}{\beta\tan x}$
- Si $\alpha\neq 0$, $\beta=0$, $\frac{\tan x}{\alpha}$
- Si $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\alpha\beta>0$, $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\tan x\right)$
- Si $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\alpha\beta<0$, $\dfrac{1}{2\beta\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}\left(\ln\left|\tan(x)+\sqrt{-\dfrac{\alpha}{\beta}}\right|-\ln\left|\tan(x)-\sqrt{-\dfrac{\alpha}{\beta}}\right|\right)$.

5. Traiter avec la question suivante. Calculer la somme et la différence des deux intégrales.
   Réponse : $\dfrac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)$ pour (5) et $(\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)$ pour (6).
6. Voir question précédente.
7. CDV $y=\cos(x)$, ou $y=\sin(x)$ puis $z=y^2$. Réponse : $\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{\cos^2(x)-2}{\cos^2(x)}\right)=\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1+\sin^2(x)}{1-\sin^2(x)}\right)$.
8. IPP puis s'arranger pour retomber sur la même intégrale et regrouper. Autre solution : CDV $y=\tan(x)$.
   Réponse : $\tan(x)+\dfrac{1}{3}\tan^3(x)$.
9. CDV $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Autre solution : formules de duplication de l'angle...
   Réponse : $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
10. CDV $y=\operatorname{sh}(x)$, puis DES (fastidieux), ou mieux : CDV $z=\frac{1}{y}$.
    Réponse : $-\dfrac{1}{3\operatorname{sh}^3(x)}+\dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)}-\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right)$.
11. Écrire $\operatorname{th}(x)$ avec e^x et simplifier.
    Réponse : $\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{x}{2}$.
12. CDV $y=\operatorname{sh}(x)$.
    Réponse : $\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}^2(x)-\operatorname{sh}(x)+2\ln|1+\operatorname{sh}(x)|$.
13. Analogie avec $\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$. Réponse : $-\coth(x)$.
14. $\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sh}(2x)$, et utiliser question précédente.
    réponse : $-2\coth(2x)$.
15. CDV $y=\operatorname{sh}(x)$
    Réponse : $\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{2}\right)$
16. Formules de duplication, ou CDV $y=\mathrm{e}^x$
    Réponse : $\operatorname{th}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Par le cdv $y=\mathrm{e}^x$, on trouve $\dfrac{-2}{1+\mathrm{e}^x}$ qui diffère d'une constante de la forme précédente.
17. Formules de duplication de l'angle.
    Réponse : $2\sqrt{2}\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}_+$, $-2\sqrt{2}\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}_-$. Recoller en 0 par ajustement de constante.
18. CDV $y=\operatorname{sh}(x)$, puis faire $1+y^2-y^2$ au numérateur, puis IPP en séparant le y^2 en 2.
    Réponse : $\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))+\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}^2(x)}$

`[int007]`

Indications ou solutions pour l'exercice 1.51 –

1. $u'u^{-3}$. Réponse : $\dfrac{1}{2\ln^2 2}-\dfrac{1}{2\ln^2 3}$
2. Primitive connue. Réponse : $-\dfrac{1}{2}\ln 2$.
3. $\frac{u'}{u}$ (dérivez $\ln\circ\ln$). Réponse : $\ln|\ln\ln x|$
4. $+1-1$ pour se ramener à une dérivée classique. Réponse : $1-\dfrac{\pi}{4}$.
5. 1 IPP puis primitive de ln (ou 2e IPP). Réponse : $2(\ln^2 2-2\ln 2+1)$.

6. Quatre IPP successives (ou directement IPP itérée). Réponse : $9\mathrm{e}-24$.
7. Deux IPP successives, puis regrouper. On peut aussi passer en complexe. Réponse : $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\pi}+1)$
8. IPP pour retrouver tan : Réponse : $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\ln 2$.
9. $-1+1$ sur $\tan^2$ pour avoir une dérivée classique, puis IPP. Réponse : $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi-\dfrac{\pi^2}{18}-\ln 2$.
10. CDV $x=y^6$, puis division euclidienne. Réponse : $11-6\ln 3+6\ln 2$.
11. CDV $x=\sin t$ puis linéarisation. Réponse : $\dfrac{3\pi}{16}$.
12. $\frac{u'}{1+u^2}$... Réponse : $\dfrac{\pi}{4}$.
13. CDV $y=\sqrt{x+1}$. Réponse : $\dfrac{4}{3}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
14. CDV $y=x^n$. Réponse : $\dfrac{n-2}{3n}\ln 2+\dfrac{1}{3n}\ln\left(3+\dfrac{1}{2^n}\right)$
15. DES (en commençant par DES en y^2). Réponse : $\dfrac{1}{4}(\ln 3-\ln 2)-\dfrac{1}{2}(\mathrm{Arctan}\,3-\mathrm{Arctan}\,2)$.
16. DES : $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\dfrac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\cdot x+1}+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\dfrac{-2x+2\sqrt{2}}{(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1}$
Réponse : $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2sqrt2}\left(\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}+1)-\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}-1)\right)$

`[int049]`
Indications ou solutions pour l'exercice 1.52 –

1. DÉS : puis faire apparaître une forme $\frac{u'}{u}$.
$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}.$$
Enfin, faire une mise sous forme canonique sur le dernier terme pour se ramener à de l'Arctan.
Rép : $\ln 2-\dfrac{1}{2}\ln 3+\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$.
2. IPP en dérivant Arctan et en intégrant 1, pour se ramener à une fraction rationnelle
Rép : $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\ln 2}{2}$.

`[int052]`
Indications ou solutions pour l'exercice 1.53 –

1. IPP pour former une relation. Former un télescopage sur l'expression $\frac{(-1)^n I_n}{n!}$.
$$I_n=2(-1)^n n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-\ln 2)^k}{k!}+(-1)^n n!=2(-1)^n n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-\ln 2)^k}{k!}-(-1)^n n!,$$
puis, en arrangeant un peu cette expression :
$$I_n=2(-1)^{n+1}n!\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-\ln 2)^k}{k!}.$$
2. CDV $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, en exprimant $x=f(y)$ (rationnel) puis IPP. Astuce : inutile d'expliciter f' pour le changement de variable, la dérivée s'en va dans l'IPP !
Rép : $\dfrac{\pi}{2}-1$
3. DÉS
$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\},\ \frac{2x+1}{(x^2-4)^2}=\frac{1}{32}\left(\frac{10}{(x-2)^2}-\frac{1}{x-2}-\frac{6}{(x+2)^2}+\frac{1}{x+2}\right).$$
Rép : $I=\dfrac{1}{8}+\dfrac{\ln 3}{32}$.

4. - D'abord sortir une forme $\frac{u'}{u^2}$ pour se ramener au calcul de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+13)^2}$.
   - Faire une mise sous forme canonique pour se ramener à $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{(1+y^2)}$, puis à $\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} 1+y^2$ en sortant une constant de la fraction.
   - Faire une IPP en écrivant le numérateur $\frac{y}{2} \times (2y)$.

   Rép : $I = -\dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{3}\left(\operatorname{Arctan}\dfrac{2}{3} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{3}\right)$.
5. CDV $x = \cos t$, puis DÉS.
   Rép : $I = \dfrac{\ln 3}{4} - \dfrac{\ln 5}{8}$.

`[int102]`

Indications ou solutions pour l'exercice 1.54 – Merci de m'indiquer toute erreur (pour conserver la forme, j'ai fait tous les calculs à la main).

1. IPP (la fraction rationnelle à côté du ln se primitive bien). On continue par DES, ou on peut éviter cette DES par changement de variable $y = \frac{1}{x}$.
   Réponse : $\frac{3}{40}\ln(2) - \frac{1}{4}\operatorname{Arctan}(3) + \frac{1}{4}\operatorname{Arctan}(2)$.
2. Cvd $y = \ln(x)$ puis DES.
   Réponse : $\frac{1}{6}\ln(3) - \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6}$.
3. Cdv $y = \frac{1}{x^2}$.
   Réponse : $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. cdv $y = \ln(x)$ et IPP itérée.
   Réponse : $2\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\ln(2))^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!} - (-1)^n n!$.
5. Fonction impaire (et définie avec les nouvelles bornes considérées) sur l'intervalle d'intégration.
   Réponse : 0.
6. Cdv $y = \sin(x)$ puis linéarisation du $\cos^4$. On peut aussi isoler un terme $1-x^2$, et faire une IPP, de sorte à réduire l'exposant, et recommencer jusqu'à obtenir la dérivée de l'Arcsin (ou à l'étape précédente, l'aire d'un quart de disque).
   Réponse : $\frac{3\pi}{16}$.
7. Mise sous forme canonique, cdv y : $\frac{x+1}{2}$ puis $y = \sin(t)$, et enfin linéarisation. On peut s'arrêter après le premier cdv et reconnaître, à un facteur près, l'aire d'un demi-disque.
   Réponse : 2π.
8. Cdv $x = y^6$.
   Réponse : $\frac{3\pi}{2} - \frac{152}{35}$.
9. Mettre $\cos^2(x)$ en facteur au dénominateur et faire le cdv $y = \tan(x)$.
   Réponse : $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
10. Le polynôme sous la racine se factorise en $(x+2)^2(x-4)$. Poser alors $y = x-4$. Remarquer au passage qu'il s'agit d'une intégrale impropre.
    Réponse : $\frac{2}{\sqrt{6}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
11. cdv $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, puis IPP pour diminuer le degré des pôles.
    Réponse : $\frac{\pi}{2} - 1$.
12. Faire partir le x du numérateur dans une intégration u'/u^2, pour le reste, faire une mise sous forme canonique, puis écrire au numérateur $1 = 1 + x^2 - x^2$ afin de pouvoir faire une IPP.
    Réponse : $\frac{5}{12} + \frac{\pi}{12}$
13. cdv $y = \sqrt{x+1}$,
    Réponse : $2\sqrt{2} - 2 + 2\ln(2\sqrt{2} - 2)$.

14. IPP, puis changement de variable $y = \sqrt{x}$. On est ramené à une fraction rationelle dont le dénominateur est $1 + y^4 = (1 + \sqrt{2}y + y^2)(1 - \sqrt{2}y + y^2)$. Terminer avec une DES.

    Réponse : attendre l'année prochaine.

15. Plusieurs façons de procéder : IPP puis cdv, ou cdv puis IPP, ou encore cdv global $y = \ln(1 + \sqrt{x})$, soit $x = (e^y - 1)^2$. Terminer par une IPP pour les ye^y.

    Réponse : $\frac{1}{2}$.

[int011]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.55 – Former une relation entre $I(p, q)$ et $I(p+1, q-1)$ (par IPP), et itérer jusqu'à $I(p+q, 0)$.

Réponse : $I(p, q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Équations différentielles

[ed001]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.56 – (Entraînement technique)

1. $\mathcal{S} = \{x \mapsto C e^{-2\,\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}(x))},\ C \in \mathbb{R}.\}$

2. Soit $(E) : (1 + x^2)y' - xy = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Solution particulière par variation de la constante.

   $\mathcal{S} = \left\{K\sqrt{1 + x^2} - \dfrac{1}{3(1 + x^2)}, K \in \mathbb{R}\right\}$.

3. Solution particulière à rechercher sous forme polynomiale de degré 1.

   $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu e^{4x} - \dfrac{3}{8} \cdot x - \dfrac{5}{32},\quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

4. Solution particulière à rechercher d'abord pour un second membre exponentiel complexe (donc sous la forme $\lambda e^{(1+i)x}$, puis passer à la partie réelle.

   $\mathcal{S} = \left\{x \mapsto e^{\frac{1}{2}x}(c\cos(x) + d\sin(x)) + \frac{e^{2x}}{85}(7\cos(x) + 6\sin(x))\right\}$.

5. Matriciellement, on est ramené au calcul de $\exp(xA)$, avec $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A pour faire le calcul. Exprimer les solutions avec 2 paramètres, qu'on peut ensuite simplifier un peu.

   Rechercher une solution particulière sous la forme polynomiale de degré 1 sur chacune des composantes.

   Solutions : $\begin{cases} y(x) &= ae^{2x} + 2be^{3x} - \frac{2}{3}x - 59, \\ z(x) &= ae^{2x} + \frac{b}{2}e^{3x} - \frac{4}{3}x - \frac{7}{9}, \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$

6. Comme indiqué, on trouve une solution homogène, $y_0(x) = x^2$. On peut utiliser ensuite la méthode du wronskien, qui amène sur $]1, +\infty[$

   $$\left(\frac{y}{y_0}\right) = \int^x \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right) e^{2t}\ dt.$$

   Astuce suprême, faire une IPP sur l'une des deux moitiés de l'intégrale, les deux parties intégrales se compensent... Avant recollement, $y(x) = \mu_i e^{2x} + \lambda_i x^2$ sur chaque intervalle. Les raccords $\mathcal{C}^2$ imposent finalement $y(x) = \mu e^{2x} + \lambda x^2$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

[ed002]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.57 –

1. Utiliser la méthode de variation de la constante pour la solution particulière.

   Réponse : $y(x) = (1 + x^2)(K + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}(x)) + \dfrac{x}{2}$

2. Sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$ (et tout I inclus dans l'un de ces 3 intervalles) : $y(x)=K\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$
Les solutions ne se recollent pas en 1 et -1, sauf si $K=0$: sur tout intervalle ouvert contenant -1 ou 1, l'unique solution est la fonction nulle.
3. Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$: $y(x)=(\ln(|x|)-1+\frac{K}{x})$. Pas de solution définie en 0, puisque l'équation ne l'est pas.
Remarque : la valeur absolue de la primitivation du ln passe dans la constante K.
4. $y(x)=\dfrac{K+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{\mathrm{Arctan}(x)}$, sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
Sur I contenant 0, se prolonge uniquement si $K=0$: $y(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{2\,\mathrm{Arctan}(x)}$, $y(0)=0$ (par équivalent). Vérifier que cette fonction est dérivable en 0, et que l'ED est vérifiée en 0.
5. $y(x)=K\mathrm{e}^{\frac{(x+1)^2}{2}}-1$.
Ici, la solution particulière est évidente, inutile d'utiliser la méthode de variation de la constante !
6. $y(x)=K\mathrm{e}^{-x}$ ou $y(x)=K'\mathrm{e}^{x}$ sur tout I sur lequel y est de signe constant (avec $K\leqslant 0$, $K'\geqslant 0$, discuter suivant le signe). Par TVI, si y s'annule en x_0, y étant croissante, elle est de signe constant sur $]-\infty,x_0[$ et $]x_0,+\infty[$. La continuité assure alors $K=K'=0$. Ainsi, la description ci-dessus est valable sur $\mathbb{R}$ entier, on ne peut pas recoller les deux descriptions, sauf pour la fonction nulle.
7. Même principe, en résolvant sur des I sur lesquels $y-1$ est de signe constant.
$y(x)=Kx+1$, $K\geqslant 0$, ou $y(x)=\frac{K}{x}+1$, $K\leqslant 0$. Les solutions ne peuvent pas se recoller en $x_0>0$.
8. Changement de fonction $z=\mathrm{e}^y$. $y(x)=-\dfrac{1}{2}\ln|x|+\ln\left(K+\dfrac{|x|^{\frac{5}{2}}}{5}\right)$. Pour que ce soit défini sur $\mathbb{R}$, $K>0$, sinon, ce n'est pas défini sur un intervalle centré en 0.
9. Changement de fonction $z=\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $z=\frac{K}{x^2}+\frac{1}{x}$, $y=x\exp\left(\dfrac{K}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)$.

[ed006]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.58 –

1. Solution : $y(x)=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}$.
Par principe de superposition pour le second membre en devinant la forme ; ou par méthode de variation des constantes. On pourra proposer les 2 versions.
2. Chercher d'abord une solution particulière pour un second membre égal à $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$, sous la forme $\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$, puis prendre la partie imaginaire.
Solution : $y(x)=\dfrac{4}{5}\mathrm{e}^{-x/2}(\cos(x/2)+2\sin(x/2))-\dfrac{4}{5}\cos(x)-\dfrac{2}{5}\sin(x)$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$, puis exprimer les conditions de recollement pour que la fonction obtenue soit 2 fois dérivable en 0.
Solution : $y(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}+\alpha\cos(x)+(\beta+\varepsilon(x))\sin(x)$, où $\varepsilon(x)=0$ si $x<0$ et 1 sinon.
4. Poser pour $t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $z(t)=y(\tan(t))$, c'est-à-dire $y(x)=z(\mathrm{Arctan}(x))$. Utiliser l'une ou l'autre de ces relations pour obtenir $z''+z=0$.
Solution : $y(x)=a\cos(\mathrm{Arctan}(x))+b\sin(\mathrm{Arctan}(x))=\dfrac{a+bx}{\sqrt{1+x^2}}$.
5. Justifier qu'une solution polynomiale non nulle est de degré 1 ou 2, puis poser des coefficients. Une solution est $y_0(x)=x^2-1$.
Méthode du wronskien pour obtenir les autres solutions.
Solution : z vérifie $2(x^2+1)z''+x(x^2-1)z'=0$, d'où $z'=K\frac{x^2}{x^2-1}$ puis $y=K(-2x+(x^2-1)\ln\frac{x-1}{x+1})+c(x^2-1)$.

Fonctions de plusieurs variables

[fnv002]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.59 –

1. Continu, dérivable, dérivées partielles 1 et -1 ; pas $\mathcal{C}^1$.
2. Continu, les dérivées partielles existent ; elles ne sont pas continues.
3. continu, les dérivées partielles n'existent pas dès que $|x| = |y| \neq 0$.
4. continu, les dérivées partielles existent mais ne sont pas continues.
5. continu, dérivable, y compris en tous les points en lesquels $x = 0$ ou $y = 0$ (taux d'accroissement). Dérivées continues partout sauf en $(0, 0)$.
6. non continu aux points $x + y = 0$. Les dérivées partielles n'existent pas en ces points, sauf en $(0, 0)$.
7. pas continu en $(0, 0)$. Les dérivées partielles existent mais ne sont pas continues.
8. continu, les dérivées partielles existent, mais non continues.

[fnv009]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.60 –

1. TAF entre x et y.
2. Taylor-Young.
3. Pour la limite en un point (x_0, x_0), il faut considérer la limite quand $(x, y) \to (x_0, x_0)$ d'une part quand (x, y) reste sur la droite $y = x$, d'autre part quand (x, y) reste dans le complémentaire de cette droite.

[fnv058]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.61 –

1. Justifier que $(x^2 + y^2)^2 \leqslant 2(x^4 + y^4)$. Tout comparer à la norme ensuite ! On peut aussi se ramener à la norme 4 (HP) ou la norme infinie (au programme de Spé).
2. Calcul !
3. Taux d'accroissement puis calcul.

[fnv003]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.62 – Utiliser la règle de la chaîne.
Réponse : 0.

[fnv114]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.63 – Calculer le gradient pour rechercher les points critiques. $(0, 0)$ est l'unique point critique, et ce n'est pas un extremum local (prendre y très proche de x).

[fnv063]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.64 –

1. Calculer le gradient, et remarquer qu'une CN pour qu'il s'annule est la dépendance linéaire des deux vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y - a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x - a \\ y \end{pmatrix}$. On obtient la CN $x + y = a$. En simplifiant pour ces valeurs, la CNS est alors $x + y = a$, avec $x \in [0, a]$.
2. La valeur est la même pour tout point critique : $\sqrt{2}a$.

   Avec le programme de Spé, on peut justifier l'existence d'un minimum (car lorsque $\|(x, y)\| \longrightarrow +\infty$, $f(x, y) \to +\infty$, donc l'inf, qui existe, aussi l'inf dans une boule fermée bornée (on peut se débarrasser de l'infini. La continuité permet alors d'exploiter un théorème, analogue du théorème de la borne atteinte, pour conclure.

   Avec le programme de sup, on peut répondre différemment, de façon plus explicite mais en anticipant un peu la question suivante, en décrivant f comme somme de deux distances euclidiennes, et en utilisant l'inégalité triangulaire pour minorer cette somme par $\sqrt{2}a$.
3. $d(X, A) + d(X, B)$ est minimum lorsque X est sur le segment (A, B).

Probabilités

[gen033]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.65 –

1. Réponse : $\frac{3}{4}$ (Par complémentation)
2. Réponse : $\frac{2}{5}$. remarquez que c'est une probabilité conditionnelle qu'on cherche à calculer. Utiliser la formule adaptée à cette situation.

[gen050]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.66 –

- FPT
- Encore FPT, appliquée à une mesure de probabilité conditionnelle
- Bayes (on remonte le temps)
- FPT pour trouver une relation de récurrence.

Arithmétique et structures algébriques

[ari024]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.67 – Décomposer 42 et 1680 en facteurs premiers. Distribuer les puissances maximales et minimales sur a et b. Réponse : $(1680, 42)$, $(672, 210)$ et les symétriques.

[ari023]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.68 – Solution particulière + solution homogène. Partir d'une relation de Bézout pour la SP. Gauss pour la solution homogène.
Solution : $(-762 + 1981k, 752 - 1955k)$.
Ces dates ont à voir avec une oeuvre majeure de Bach, et un certain pianiste canadien.

[ari022]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.69 – Inversibilité ssi $k \wedge n = 1$. Algorithme d'Euclide étendu pour trouver une relation de Bézout et réduction modulo n.
Les 6 compositeurs qui se cachent derrière ces dates sont H..., B..., S..., M..., A..., C...
Réponses : 309, pas inversible, $-908 = 1063$, 243, $-669 = 1271$, -806.

Polynômes et fractions rationnelles

[pol020]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.70 – Évaluer les dérivées successives de P en 1 jusqu'à obtenir une valeur non nulle. Multiplicité 2 pour (a), 3 pour les 2 autres.

[pol092]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.71 –

1. $F_1(X) = 1 - \dfrac{8}{X-1} + \dfrac{13}{X-2}$
2. $F_2(X) = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{(X-1)^2}$
   Pour trouver le dernier coefficient, on peut multiplier par X et considérer la limite en $+\infty$.
3. $F_3(X) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{(X-1)^2} + \dfrac{1}{4} \dfrac{1}{(X+1)^2}$
   Même technique qu'avant, ainsi qu'une évaluation en 0.
   On peut aussi s'en sortir, pour un pôle multiple, par DL au voisinage de chacun des pôles, puis identification. J'explicite un peu cette méthode qui n'est pas au programme mais très pratique dans ce type de situation.

Si $F(X) = \frac{G(X)}{(X-a)^m}$, où a n'est plus ni pôle ni racine de G, poser $h = x - a$, et faire un DL en 0 de $h^m F(a+h) = G(a+h)$. Remarquer qu'en exprimant ce DL avec la forme de la DES, les coefficients correspondent aux coefficients de la partie polaire associée à a. Identifier (attention à l'ordre !).

Cette méthode est d'autant plus efficace qu'elle évite d'avoir à mêler les parties polaires. La partie polaire associée au pôle a se calcule indépendamment de la partie polaire associée au pôle b.

4. $F_4(X) = \dfrac{1}{(X-1)^2} - \dfrac{2}{X-1} + \dfrac{j}{(X-j^2)^2} - \dfrac{2j^2}{X-j^2} + \dfrac{j}{(X-j)^2} - \dfrac{2j}{(X-j)}$.
   Trouver la partie polaire associée à 1 (par exemple par DL, comme indiqué dans la question précédente), puis exploiter les symétries : remarquer que $F_4(jX) = F_4(j^2X) = F_4(X)$. On peut alors procéder par identification, en utilisant l'unicité de la DES : les autres parties polaires se déduisent de celle de 1.
5. $F_5(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{X-k}$
6. La dérivée du dénominateur est simple à exprimer. Il y a une formule à exploiter pour les pôles simples dans ce cas.
   $F_6(X) = \dfrac{1}{n(X-1)^2} - \dfrac{n-1}{2n(X-1)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\omega_k}{n(\omega_k - 1)(X-\omega_k)}$.
7. $F_7(X) = \dfrac{(-1)^n}{X^2} + \dfrac{n(-1)^n}{X} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}(n-k+1)}{(X-1)^k}$
   DL(1) en 0 de $x^2 f(x)$ et DL à l'ordre $n-1$ en 1.
8. De même, par DL : $F_8(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{\binom{p+q-k-1}{p-k}}{X^k} + \sum_{k=1}^{q} \frac{\binom{p+q-k-1}{q-k}}{(1-X)^k}$.

[pol093]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.72 –

1. $F_1(X) = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{j}{X+j} + \dfrac{j^2}{X+j^2} = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{-X+2}{X^2-X+1}$
2. Sauf erreur de calcul de ma part :

$$\begin{aligned} F_2(X) &= \frac{2}{9(X-1)^2} + \frac{4}{27}\cdot\frac{1}{X-1} + \frac{5}{108}\cdot\frac{1}{X+2} - \frac{4+j}{36}\cdot\frac{1}{X+2j} - \frac{4+j^2}{36}\cdot\frac{1}{X+2j^2} \\ &= \frac{2}{9(X-1)^2} + \frac{4}{27}\cdot\frac{1}{X-1} + \frac{5}{108}\cdot\frac{1}{X+2} + \frac{-7X+6}{36(X^2-2X+4)} \end{aligned}$$

3. Le faire d'abord dans $\mathbb{R}$:

$$F_3(X) = X^3 - X^2 - X + 2 - \frac{X+1}{X^2+1} + \frac{X}{X^2+X+1}$$

   Puis dans $\mathbb{C}$:

$$F_3(X) = X^3 - X^2 - X + 2 - \frac{1+\mathrm{i}}{2}\frac{1}{X+\mathrm{i}} - \frac{1-\mathrm{i}}{2}\frac{1}{X-\mathrm{i}} + \frac{2+j}{3}\frac{1}{X-j} + \frac{2+j^2}{3}\frac{1}{X-j^2}.$$

4. Utiliser un argument de symétrie pour justifier que dans $\mathbb{C}$ les coefficients de la DES sont tous égaux.

$$F_4(X) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{X-\omega^k},$$

   où je vous laisse deviner ce qu'est ω.

$$F_4(X) = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{X-1} + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{X-\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)}{X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)X+1}\right).$$

Algèbre linéaire

[ev016]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.73 – Comme dans toutes les études de ce type, considérer des coefficients λ_i tels que $\sum \lambda_i f_i = 0$, et utiliser tous les moyens du bord pour montrer que les λ_i sont nuls.

1. Libre ssi $a \not\equiv b$ $[\pi]$. Évaluer en un 0 de l'une des deux.
2. Lié : à l'aide des formules de trigonométrie, montrer qu'elles sont toutes dans un espace engendré par 2 fonctions bien connues.
3. Libre : méthode polynomiale (écrire la CL comme polynôme en cos, ce polynôme admet alors une infinité de racines)
4. Libre d'après le point précédent et le cours.
5. Libre : Méthode polynomiale en écrivant la relation sous la forme $P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) = 0$. Trouver une infinité de racines de P et de Q.
6. Libre : méthode polynomiale
7. Libre : dériver une relation non triviale, s'il en existe, et considérer un équivalent en 0.

[ev063]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.74 – Premier réflexe : chercher une relation entre les vecteurs. C'est le cas pour la 2 ($x_1 + x_2 = x_3 + x_4$). On n'en voit pas pour la question 1. Dans ce cas, poser une relation et résoudre le système. Ou de façon équivalente, (souvent plus pratique dans les situations concrètes), étudier l'inversibilité de la matrice correspondante. La première famille est libre (échelonner la matrice par la méthode du pivot).

[ev067]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.75 –

1. $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{-1}{5} \begin{pmatrix} 9 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
2. N'introduisez pas de fractions dans votre pivot, il vaut mieux multiplier les lignes par ce qu'il faut. Solutions :
$$\frac{1}{11}\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix} \right), \quad t \in \mathbb{R}$$
3. Faites cette question et la suivante en même temps, en faisant le pivot sur la matrice obtenue en juxtaposant la matrice du système aux deux matrices colonnes des deux secondx membres. Cela vous évite de faire plusieurs fois les mêmes calculs. Le système est compatible. L'unique solution est $x = 1$, $y = 0$.
4. Cette fois le système n'est pas compatible.
5. De même, cette question est à faire avec la suivante.
$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z, t, u \in \mathbb{R}.$$
6. Système incompatible.

[ev118]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.76 – Dans tous ces exemples, échanger l'ordre des lignes, afin de reporter les discussions sur λ le plus tard possible (les λ se propageront le plus à droite possible). Ces systèmes ont un rapport avec la recherche des valeurs propres des matrices (les λ pour lesquels l'ensemble des solutions n'est pas trivial sont les valeurs propres de la matrice). C'est la première étape vers la diagonalisation des matrices (ces valeurs propres seront, en cas de diagonalisabilité, les coefficients de la matrice diagonale recherchée). Voir la Spé pour ces notions. Solutions

1. - Si $\lambda \notin \{-1,1,2\}$, $\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$
   - Si $\lambda = 1$, $\mathcal{S} = \mathbb{R}(1,1,1)$
   - Si $\lambda = -1$, $\mathcal{S} = \mathbb{R}(0,1,1)$
   - Si $\lambda = 2$, $\mathcal{S} = \mathbb{R}(1,2,3)$.
2. - Si $\lambda \notin \{3,6,9\}$, $\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$
   - Si $\lambda = 3$, $\mathcal{S} = \mathbb{R}(2,1,-1)$
   - Si $\lambda = 6$, $\mathcal{S} = \mathbb{R}(2,0,1)$
   - Si $\lambda = 9$, $\mathcal{S} = \mathbb{R}(1,1,0)$.

Matrices et déterminants

`[mat009]`

Indications ou solutions pour l'exercice 1.77 –
On désigne par C_i les colonnes de la matrice de gauche, et par L_j les lignes de la matrice de droite. Je me contente de donner la démarche sans expliciter le résultat. Choisir de travailler sur les lignes ou sur les colonnes, de sorte à ce que les combinaisons linéaires soit simples à calculer (donc beaucoup de coefficients nuls). Remarquer que si la matrice de droite a des colonnes qui se répètent, cela donne le même calcul pour les combinaisons linéaires, ce qui permet d'éviter quelques calculs (par exemple pour P_{10}. Pareil pour P_{12} avec les lignes, la dernière étant la moitié de l'avant dernière.

1. $P_1 = (C_2 \mid C_1)$
2. $P_2 = \begin{pmatrix} -L_1 \\ 2L_2 \end{pmatrix}$
3. $P_3 = (C_1 \mid -C_2 \mid 2C_1 \mid C_1)$
4. $P_4 = (-C_2 \mid C_1 \mid 2C_3)$
5. $P_5 = \begin{pmatrix} L_3 \\ -L_1 \\ -L_2 \end{pmatrix}$
6. $P_6 = (0 \mid C_1 \mid C_2 \mid C_3)$
7. $P_7 = (C_4 \mid C_1 \mid C_2 \mid C_3)$
8. $P_7' = (C_1 + C_4 \mid C_1 + 2C_2 \mid C_2 + C_4 \mid C_2 + C_3)$
9. $P_8 = (2C_2 + C_4 \mid 2C_2 + C_4 \mid C_2 + C_3 \mid C_1 + 2C_4)$
   N'oubliez pas de remarquer que les deux premières colonnes sont identiques. Inulile de faire deux fois le même calcul !
10. $P_9 = (3L_2 + 4L_3 \mid 3L_2 + 4L_3n \mid L_1 + L_2 + L_4 \mid L_1 + L_2 + L_4)$
    De même, il n'y a ici que deux colonnes à calculer !
11. $P_{10} = \begin{pmatrix} L_2 + L_3 \\ L_1 + 2L_2 \\ 2L_1 + L_4 \\ L_1 + L_3 + L_4 \end{pmatrix}$
12. $P_{11} = (C_1 + 2C_2 + 3C_3 + C_4 \mid \text{idem} \mid 4C_1 + C_2 + 2C_3 + 2C_4 \mid \text{idem } * 2)$
    On peut aussi faire des CL des lignes de la deuxième matrice, dans ce cas, il y a trois calculs à faire, mais un peu plus rapides. Aucune des deux méthodes n'est vraiment meilleure.

[mat010]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.78 – Principe pour être efficace : les relations entre les colonnes donnent des vecteurs du noyau. Trouver des relations permet alors de minorer la dimension du noyau, donc majorer le rang. Pour des petites matrices, il n'est alors souvent pas dur de conclure en minorant le rang en étudiant l'indépendance linéaire de certaines colonnes.

1. $\mathrm{rg}(M_1) = 2$
2. $\mathrm{rg}(M_2) = 1$
3. $\mathrm{rg}(M_3) = 2$
4. $\mathrm{rg}(M_4) = 1$
5. $\mathrm{rg}(M_5) = 2$
6. $\mathrm{rg}(M_6) = 1$
7. $\mathrm{rg}(M_7) = 2$
8. $\mathrm{rg}(M_8) = 1$
9. $\mathrm{rg}(M_9) = 1$
10. $\mathrm{rg}(M_{10}) = 1$
11. $\mathrm{rg}(M_{11}) = 2$
12. $\mathrm{rg}(M_{12}) = 2$, $C_1 + C_2 = C_3$
13. $\mathrm{rg}(M'_{12}) = 2$, $C_1 - C_2 = C_3$
14. $\mathrm{rg}(M_{13}) = 2$, $2C_1 + C_2 = C_3$
15. $\mathrm{rg}(M_{14}) = 2$, $3C_1 - 2C_2 = C_3$, relation que l'on trouve en considérant la première ligne, qui impose les coefficients de C_1 et C_2.
16. $\mathrm{rg}(M_{15}) = 3$ (de même, s'aider de la dernière ligne pour trouver la seule relation possible, qui n'en est pas une)
17. $\mathrm{rg}(M_{16}) = 3$ (même raisonnement, la seule relation doit faire intervenir $C_1 + C_2$, et cette opération ne donne pas un vecteur colinéaire à C_3)
18. $\mathrm{rg}(M_{17}) = 2$, $C_1 = C_4$ et $C_1 + C_2 = C_3$.
19. $\mathrm{rg}(M_{18}) = 3$
20. $\mathrm{rg}(M_{19}) = 3$
21. $\mathrm{rg}(M_{20}) = 4$
22. $\mathrm{rg}(M_{21}) = 3$
23. $\mathrm{rg}(M_{22}) = 4$
24. $\mathrm{rg}(M_{23}) = 5$
25. $\mathrm{rg}(M_{24}) = 4$
26. $\mathrm{rg}(M_{25}) = 4$.

[mat014]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.79 –

1. Les colonnes de A vérifient $3C_2 - C_1 = C_3$. Ainsi, le rang de A est au plus 2. Comme les deux premières colonnes sont non colinéaires, son rang est 2. L'image est engendrée par les colonnes. Les deux premières colonnes engendrant un espace de dimension 2, elles forment une base de $\mathrm{Im}(f)$. Le noyau est de dimension 1 (thm du rang), et contient $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d'après la relation sur les colonnes).

2. Pivot : B est de rang 1, les trois premières colonnes forment une famille libre, donc une base de l'image, le noyau est engendré par $\begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ 17 \\ -9 \end{pmatrix}$ (dur à deviner ! les calculs sont inévitables ici).

[mat011]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.80 – Pour A_1 à A_5, utiliser la formule du cours avec le déterminant et la comatrice.

Pour les autres, procéder par la méthode du pivot.

1. $A_1^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
2. $A_2^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. A_3 non inversible
4. $A_4^{-1} = -\frac{1}{38}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$
5. $A_5^{-1} = -\frac{1}{42}\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
6. $A_6^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
7. $A_7^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
8. A_8 non inversible
9. $A_9^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 7 & 14 & -7 \\ 7 & 10 & -9 \\ -7 & -16 & 13 \end{pmatrix}$
10. A_{10} non inversible
11. $A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
12. $(A'_{11})^{-1} = \frac{1}{105}\begin{pmatrix} 15 & -45 & 60 & -30 \\ 4 & 44 & -33 & 13 \\ -28 & 7 & 21 & 14 \\ 18 & -12 & 9 & 6 \end{pmatrix}$
13. $(A''_{11})^{-1} = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} -38 & -79 & 33 & 45 \\ 30 & 83 & -29 & -37 \\ 20 & 60 & -24 & -20 \\ 16 & 20 & -8 & -16 \end{pmatrix}$
14. $A_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

15. $A_{13}^{-1} = \frac{1}{85}\begin{pmatrix} 19 & 22 & -20 & -8 & 16 \\ 33 & -11 & 10 & 4 & -8 \\ -45 & 15 & 25 & 10 & -20 \\ -27 & 9 & 15 & -11 & 22 \\ 81 & -27 & -45 & 33 & 19 \end{pmatrix}$

16. $A_{14}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -7 & -1 & -3 \\ 15 & -9 & -12 & -12 & -9 \\ -7 & 6 & 8 & 5 & 6 \\ -5 & 3 & 7 & 10 & 3 \\ -16 & 15 & 17 & 23 & 6 \end{pmatrix}$

17. $A_{15}^{-1} = \frac{1}{114}\begin{pmatrix} -40 & 20 & 35 & -3 & 13 \\ 74 & -94 & -22 & 54 & 70 \\ -22 & 68 & 5 & -33 & -47 \\ -98 & 106 & -14 & -90 & -28 \\ 70 & -92 & 10 & 48 & 20 \end{pmatrix}$

`[mat012]`

Indications ou solutions pour l'exercice 1.81 –

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
5. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
7. $(F = \mathbb{R}^2)$ $\begin{pmatrix} -7 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
8. Aidez-vous de l'échelonnement de la base d'arrivée, pour décomposer les éléments $f(b_1)$, $f(b_2)$ et $f(b_3)$ dans cette base. On obtient la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
9. $\begin{pmatrix} -6 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
10. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

11. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & & & 0 \\ 0 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
12. $\left(\binom{k}{i}(-a)^{k-i}\right)_{0\leqslant i,k\leqslant n}$, (formule du binôme) avec la convention $\binom{k}{i} = 0$ si $i > k$.
13. $\left(\binom{k}{i}a^{k-i}\right)_{0\leqslant i,k\leqslant n}$ (formule du binome pour $X^k = (X - a + a)^k$, ou formule de Taylor)
14. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}$.
17. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
18. $\begin{pmatrix} \cos a & a\cos a & \sin a & a\sin a \\ 0 & \cos a & 0 & \sin a \\ -\sin a & -a\sin a & \cos a & a\cos a \\ 0 & -\sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
20. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \cdots & 2-2^k & \cdots & 2-2^n \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 2^k-1 & \cdots & 2^n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^0 & 2-2^1 & 2-2^2 & \cdots & 2-2^k & \cdots & 2-2^n \\ 2^0-1 & 2^1-1 & 2^2-1 & \cdots & 2^k-1 & \cdots & 2^n-1 \end{pmatrix}$
21. Avec la convention $\binom{j}{i} = 0$ si $i > j$ ou si $i < 0$,

$$\left(j(j-1)(-j)^{j-i}\binom{j-2}{i-2} - j(-j)^{j-i-1}\binom{j-2}{i-1} + (2j-1)(-j)^{j-i-2}\binom{j-2}{i}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}.$$

[mat013]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.82 – Vérifiez en exprimant la matrice de façon directe.

[mat090]
Indications ou solutions pour l'exercice 1.83 –

1. Utiliser la multilinéarité sur les colonnes. Rép : $2abcV(a, b, c)$.
2. Annuler des c. Rép : $(a - b)^2(a + b + 2c)(a + b - 2c)$.
3. Se débarasser d'un certain nombre de a et b. Rép : $(1 + 2a + 2b)(1 + 2a - 2b)$.
4. Commencer par faire partir a^2 et b^2 et simplifier encore la dernière colonne. Rép : $2abc(a + b + c)^3$
5. En multipliant les colonnes de façon adéquate, on se ramène facilement à un Vandermonde. Rép : $-V(a, b, c, d)$.

6. Faire partir les ab et cd, et se ramener à une matrice triangulaire par blocs. Rép : $(bd-ac)((d-b)^2-(a-c)^2)$.
7. Faire partir des 1. Rép : $(c+a-b)(c-a+b)(c-a-b)(c+a+b)$.

Algèbre bilinéaire

`[bil015]`

Indications ou solutions pour l'exercice 1.84 – Partir d'une base de F et l'orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt.

- $\left(\frac{1}{sqrt2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}\right)$.
- Pour simplifier les calculs (avoir un échelonnement), on peut modifier l'ordre des vecteurs, en prenant (e_2, e_3, e_1). On obtient alors :
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$
Si vous n'avez pas fait cette permutation initial, vous obtenez bien sûr une autre base orthonormale.
- Attention, la norme du polynôme constant 1 n'est pas 1 !
Solution : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot X, \sqrt{\frac{30}{7}} \cdot (X^2 - \frac{1}{4}\right)$

`[bil018]`

Indications ou solutions pour l'exercice 1.85 – Pour le caractère défini, montrer par récurrence sur n que si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ $P^{(k)}(a_k) = 0$ et $\deg(P) \leqslant n$ alors $P = 0$.
Pour trouver une b.o.n., orthonormaliser la base canonique. On pourra faire le calcul préliminaire des $\left\langle X^i, X^j \right\rangle$.

`[bil026]`

Indications ou solutions pour l'exercice 1.86 – Suivant la base de $F^\perp$ de laquelle on part, on pourra obtenir différentes bases orthonormales. Les résultats que je donne ne sont donc pas uniques.

1. $F_1^\perp = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, puis bon : $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}.\right)$
2. $F_2^\perp = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, donc bon : $\left(\frac{1}{14}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right)$.
3. $F_3^\perp = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$.
Solution : $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\\-1\end{pmatrix}\right)$.
Ici, l'ordre des vecteurs de la base initiale est important. Si on inverse l'ordre, les calculs seront beaucoup plus durs (commencer par les vecteurs les plus simples, ceux dont la norme s'exprime le plus simplement possible).

4. Une base de $F_4^\perp$ est $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$. On inverse l'ordre pour l'orthonormalisation (afin de considérer en premier le vecteur le plus simple des deux). Après orthonormalisation, on obtient une b.o.n. de $F_4^\perp$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\\-1\end{pmatrix}$.

5. $F_5^\perp = \mathbb{R}1{-}21$, réponse : $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$

6. $F_6^\perp = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\3\end{pmatrix}\right)$: en effet, les deux équations, réécrites sous forme d'un produit scalaire, montrent que ces vecteurs sont orthogonaux à F. C'est alors une base de $F^\perp$ par un argument de dimension.
Résultat : $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$

7. Poser $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. L'orthogonalité avec X s'exprime par $12a + 15b + 20c + 30d = 0$ et l'orthogonalité avec X^2 par $10d + 12a + 15b + 20c = 0$. La résolution de ce système amène :
$$F_7^\perp = \operatorname{Vect}\left(X^2 - \frac{6}{5}X + \frac{3}{10}, X^3 - \frac{6}{5}X + \frac{4}{10}\right).$$
Notons (e_1, e_2) ces deux vecteurs et (f_1, f_2) l'orthonormalisée de Schmidt.
On obtient $\|e_1\| = \frac{1}{10}$, donc $f_1 = 10X^2 - 12X + 3$.
On obtient par le calcul $\langle e_2, f_1\rangle = \frac{2}{5}$,, donc
$$u_2 = X^3 - 4X^2 + \frac{18}{5}X - \frac{4}{5}.$$
Enfin, $\|u_2\| = \sqrt{11}175$ si je ne me suis pas trompé, et donc
$$f_2 = \sqrt{\frac{7}{11}} \cdot 5 \cdot (X^3 - 4X^2 + \frac{18}{5}X - \frac{4}{5}.) = \sqrt{\frac{7}{11}}(5X^3 - 4X^2 + 18X - 4).$$

[bil027]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.87 – Trouver une bon de F ou de $F^\perp$ pour projeter.

1. bon de F_1 : $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$; $M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$.
2. bon de F_2 : $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\right)$; $M = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}9 & 3 & 6\\3 & 1 & 2\\6 & 2 & 4\end{pmatrix}$.
3. bon de F_3 : $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$; $M = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2 & 1\\2 & 2 & 4 & 2\\1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$
4. $F^\perp = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\1 & 2 & 1\\-1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

5. $F^\perp = \text{Vect}\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-2\end{pmatrix}$, $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}9&0&0&0\\0&5&-2&4\\0&-2&8&2\\0&4&2&5\end{pmatrix}$

6. bon de F_6 : $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\2\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$. Réponse : $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}6&3&0&3\\3&2&-2&1\\0&-2&8&2\\3&1&2&2\end{pmatrix}$

7. Réponse : $M = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}6&2&2&-4\\2&9&-1&2\\2&-1&9&2\\-4&2&2&6\end{pmatrix}$

8. bon de $F^\perp$: $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1&-2&0&-1&-1\end{pmatrix}$ et $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{287}}\begin{pmatrix}13&2&-7&8&1\end{pmatrix}$

   Réponse : $M = \frac{1}{41}\begin{pmatrix}9&8&13&-9&4\\8&17&2&-14&-12\\13&2&34&8&1\\-9&-14&8&26&-7\\4&-12&1&-7&35\end{pmatrix}$.

9. bon de F_9 : $(\sqrt{3}(X-1))$. Réponse : $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}6&2&1\\-6&-2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

10. b.o.n. de F_{10} : $f_1 = \sqrt{3}\cdot X$, $f_2 = \sqrt{5}\cdot(4X^2-3X)$. Réponse : $M = \begin{pmatrix}0&0&0\\4&1&0\\-\frac{10}{3}&0&1\end{pmatrix}$.

[bil095]

Indications ou solutions pour l'exercice 1.88 – (Exercice technique) Les questions sont indépendantes.

1. bon de F :

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \qquad f_2 = \frac{1}{\sqrt{190}}\begin{pmatrix}1\\2\\11\\-8\end{pmatrix} \qquad f_3 = \frac{1}{2\sqrt{437}}\begin{pmatrix}33\\9\\-17\\-17\end{pmatrix}.$$

   Exprimer l'orthogonalité sous forme d'un système de 3 équations.

   bon de $F^\perp$: $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{23}}\begin{pmatrix}5\\-7\\3\\3\end{pmatrix}\right)$.

2. Commencer par exprimer une base de $P^\perp$ et projeter sur $P^\perp$. En notant p la projection orthogonale sur F et q celle sur $F^\perp$,

$$\text{Mat}_{bc}(q) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}4&-2&1&-4\\-2&1&-1&2\\2&-1&1&-2\\-4&2&-2&4\end{pmatrix} \qquad \text{puis:} \qquad \text{Mat}_{bc}(p) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}6&2&-2&4\\2&9&1&-2\\-2&1&9&2\\4&-2&2&6\end{pmatrix}$$

3. Orthonormaliser la base de F puis utiliser la formule du projeté orthogonal.

$$\text{Mat}_{bc}(p) = \frac{1}{38}\begin{pmatrix}21&17&-8&-2\\17&21&8&2\\-8&8&32&8\\-2&2&8&2\end{pmatrix}$$

4. Un peu de calcul... Calculatice autorisée pour une fois.

$$p(I_4) = \frac{1}{19825}\begin{pmatrix} 13177 & 554 & 5982 & 4023 \\ 4854 & 8600 & 0 & 4854 \\ -4023 & 4300 & 4577 & 8600 \\ -8600 & 4854 & -4300 & 4023 \end{pmatrix}$$

2 Analyse et probabilités

Ce chapitre et le suivant proposent des exercices de révision, certains étant de bon niveau. Ceux-là sont plutôt destinés aux étudiants déjà à l'aise sur ces notions (donc connaissant bien leur cours et au point sur tous les aspects techniaues développés dans le chapitre 1), et désireux de se confronter à des exercices un peu plus durs. Un certain no ;bre de ces exercices (mais pas tous) sont accompagnés d'indications disponibles dans un document séparé. Il est normal de devoir passer du temps de réflexion sur chaque exercice, y compris avec les indications. Il n'est pas nécessaire d'avoir une approche exhaustive, vous pouvez picorer un peu dans tous les paragraphes, pour avoir une vue d'ensemble.

Notions ensemblistes

[ens025]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.1 – Plusieurs méthodes possibles :

- Par récurrence, en utilisant la distributivité pour l'hérédité.
- Par double-inclusion : si $x \in A_i \cup B_i$ pour un certain i, x est dans $\bigcup_{j\in I} A_j$, sinon à l'autre union. Réciproque : sinon, construire I de sorte à n'avoir dans l'union que des ensembles ne contenant pas x.
- Montrer la relation en passant au complémentaire : se ramener à la propriété similaire dans $\mathbb{R}$, issue de la distributivité du produit sur la somme, en utilisant les fonctions caractéristiques, et le fait que $x \in A \cup B$ si et seulement si $\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) \neq 0$. Cette relation n'est d'ailleurs rien d'autre que le développement généralisé, lorsqu'on dispose d'une loi distributive sur une autre.

[ens063]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.2 – (Formule du crible)

2. Il s'agit de faire un choix d'un certain nombre de A_i parmi ceux contenant x.
3. En déduire la formule du crible.
4. Partir de l'expression de droite, écrire le cardinal de l'intersection comme une somme (prise sur $x \in E$) d'indicatrices, et intervertir les 2 sommes. Utiliser la question 2 pour se ramener, pour chaque x, à une somme du binôme, pour un exposant k (défini dans l'énoncé pour un x). Remarquer que cette somme du binôme se calcule différemment suivant que $k = 0$ ou non, ce qui permet de conclure.

[ens108]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.3 – L'appartenance de x à l'un ou l'autre de ces deux ensembles impose des contraintes sur le nombre maximal ou le nombre minimal de X_i auxquels x appartient. Par exemple, dire que x est dans l'intersection de l'union, c'est équivalent à dire que quel que soit le choix de k parties parmi les

X_i, x appartient au moins à l'une d'entre elles, donc il ne peut pas y avoir plus de $k-1$ parties qui ne contiennent pas x. L'autre expression contrôle dans l'autre sens. C'est donc logique qu'il se passe quelque chose au milieu.

`[ens026]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.4 –

1. - Si f injective, considérer $A, B \subset E$ et $x \in A \setminus B$. Que dire de $f(x)$ relativement à $f(B)$?
   - Si $\widehat{f}$ est injective, quel candidat naturel Y peut vérifier $f^{-1}(Y) = X$, pour X donné ?
   - Si $\widehat{f^{-1}}$ est surjective, considérer un antécédant par $\widehat{f^{-1}}$ des singletons.
2. - $(i) \Longrightarrow (iii)$: De quoi diffèrent deux ensembles Y et Y' ayant même image réciproque par f ?
   - $(ii) \Longrightarrow (i)$: contraposée
   - $(iii) \Longrightarrow (ii)$: Si $\widehat{f^{-1}}$ injective, que vaut $f(f^{-1}(B))$?

`[ens028]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.5 – Pour la généralisation, raisonner par récurrence. Se ramener au rang $n-1$, en composant deux flèches successives (sur le cercle). Montrer qu'on peut choisir les deux flèches qu'on compose de sorte que l'hypothèse au rang $n-1$ est alors vérifiée (on a les mêmes compositions globale qu'au rang n, faisant le tour du cercle, sauf une ; on peut s'arranger pour que celle qu'on n'a pas n'est pas l'unique injective ou l'unique surjective).

`[ens082]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.6 – Définir $g(x)$ en relevant x dans E par s. Montrer l'indépendance vis-à-vis du choix de l'antécédent de x. Montrer que la composée $i \circ h$ est bien ce qu'on veut.

`[ens051]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.7 –

1. Montrer séparément $(i) \Longleftrightarrow (ii)$ et $(i) \Longleftrightarrow (iii)$. La propriété (iii) affirme (après réexpression en passant au complémentaire) que si un sous-ensemble est tel qu'il ne contient pas d'élément admettant tous ses antécédents hors de cet ensemble (donc pas d'antécédent dans cet ensemble), alors cet ensemble est vide. Comparer à (i) !
2. Sinon, il n'est pas difficile de construire des chaînes infinies.
3. (a) Considérer une partie à 2 éléments.
   (b) Montrer (i), en utilisant le minimum.
   (c) $\mathbb{N}$ muni de l'ordre usuel.

`[ens037]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.8 –

1. Poser les éléments (X, Y, x et ε). Pour la transitivité, ε est à voir comme une marge d'erreur à répartir entre les différents points où l'on sera amené à faire une approximation : couper ε en 2 et utiliser les hypothèses avec $\frac{\varepsilon}{2}$.
2. Montrer que si l'un est non borné, l'autre aussi. Dans le cas où ils sont tous deux bornés, utiliser la caractérisation par ε de la borne supérieure. Pour montrer que M est inférieur à la borne sup de Y il suffit de montrer que pour tout ε, on peut trouver y tel que $y \geqslant M-$. Trouver d'abord x puis y par définition de la relation. Il y a deux marges d'erreur à utiliser, donc couper ε en 2.
3. Passage au quotient de l'application qui à X associe son sup.

`[ens048]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.9 – Commencer par montrer que tout ensemble ordonné non vide fini admet au moins un élément maximal. Construire φ par récurrence : à quel entier peut-on associer cet élément maximal ?

`[ens087]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.10 – On obtient facilement une inégalité en remarquant que deux éléments de la chaîne maximale ne peuvent pas être dans la part de la partition en cochaîne.
Pour montrer l'égalité, il suffit de trouver une partition ayant nombre de parts égal à la longueur d'une chaîne maximale. Pour cela, considérer les éléments minimaux, les enlever, et recommencer récursivement.

`[ens102]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.11 – Tout est trivial si $E = \varnothing$, on peut donc supposer $E \neq \varnothing$.

1. Sens réciproque classique. Sens direct : comparer (x, x_0) et (y, x_0), pour un x_0 fixé.
2. Sens direct : fixer une des deux coordonnées. Sens réciproque : prendre le minimum de la première coordonnée, puis, sur l'ensemble des (x, y) minimisant la première coordonnée, prendre le minimum de la deuxième.
3. Toujours en fixant une coordonnée dans un sens, et en remarquant que si l'ordre sur E est bien fondé, une suite strictement décroissante sur $E \times E$ a une première coordonnée stationnaire.
4. sup sur la première, puis sur la deuxième réalisant le sup (cet ensemble peut être vide, d'où problème si on ne suppose pas l'existence du sup de $\varnothing$, que signifie cette existence, d'ailleurs ?)

`[ens117]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.12 –

1. Sinon, prolonger A ou contredire la propriété d'antichaîne. Si $A_+ = E$, on peut prolonger C.
2. Par récurrence forte. Retirer une chaîne maximale, et discuter suivant qu'elle rencontre toutes les antichaînes maximales (facile) ou non (se servir alors de la question précédente et appliquer l'HR à A_+ et A_- puis recoller les chaînes sur les éléments de A)

Réels et complexes

`[top032]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.13 – Par encadrement se ramener à montrer que $\lfloor\sqrt{4n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+1}\rfloor$. Utiliser pour cela les classes de congruence modulo 4 des carrés parfaits.

`[top020]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.14 –
Discuter suivant la parité de $\lfloor x \rfloor$. On pourra exprimer x sous la forme $n + d$.
Plus généralement, on disutera suivant la classe de congruence modulo m de $\lfloor x \rfloor$, et on exprimera $\left\lfloor \frac{x+i}{m} \right\rfloor$ en fonction du quotient de $\lfloor x \rfloor$ par m.

`[top052]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.15 –

- Sens direct : Si α est rationnel, β aussi. Montrer que l'intersection n'est pas vide. Pour la deuxième propriété, il s'agit d'une histoire de densité : si A_n est le cardinal de $[\![0, n]\!] \cap \mathrm{Spec}(\alpha)$ et B_n de même avec β, on pourra remarquer que A_n s'exprime comme une certaine partie entière.
- Sens réciproque : Traduire par des encadrements l'appartenance aux deux spectres, et transformer ces encadrements en des encadrements de $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$. En sommant, et manipulant encore un peu les inégalités, en déduire un encadrement d'un entier entre deux entiers consécutifs, strictement. De même si on suppose qu'un entier n'est dans aucun spectre, en considérant les entiers k et ℓ qui font « sauter » les suites $(n\alpha)$ et $(n\beta)$ au-dessus d'un intervalle $[a, a+1]$.

`[top061]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.16 –

1. TCSTP
2. $\sum m_n$ est un majorant. Le diminuer de ε, en répartissant ε sur chacun des m_n (en coupant en $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$).

[top062]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.17 – La somme de la série majore chacune des sommes sur I. Si on la diminue d'un ε, une somme partielle (donc somme sur un sous-ensemble fini) passe au-dessus.

[top088]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.18 –

1. Si l'algorithme d'Euclide s'arrête, les deux derniers restent sont commensurables. Remonter petit à petit en montrant qu'à chaque étape, deux restes successifs sont commensurables. Réciproquement, se ramener à l'algorithme d'Euclide pour des entiers.
2. Soit c et d le côté et la diagonale d'un pentagone régulier. Soit r le reste de la division de c par d. Trouver un pentagone dont le côté est d et la diagonale r.

[comp038]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.19 –

1. - Justifier que $f_{|P}$ est bien à valeurs dans D (calculer $|f(z)|^2$ en utilisant le conjugué, et se ramener à $\frac{x}{y}$ où x et y sont deux quantités positives telles que $x < y$, ce qu'on obtient grâce à l'hypothèse sur la partie imaginaire de z. Évitez les écritures avec $a + \mathrm{i}\,b$, trop lourdes.
   - Résolvez en z l'équation $f(z) = z'$, afin de trouver une expression de la réciproque voulue, g.
   - Justifier que $g_{|D}$ est à valeurs dans P, en exporimant la partie imaginaire à l'aide du conjugué, en réduisant au même dénominateur, et en développant (on arrive à exprimer le numérateur à l'aide de $|z'|^2$, ce qui permet d'utiliser l'appartenance de z' à D).
   - On justifie que $f_{|P}$ et $g_{|D}$ sont récirpoques l'une de l'autre.
2. Calcul simple en exprimant la partie imaginaire à l'aide de $h(z)$ et son conjugué, et en utilisant l'hypothèse sur $ad - bc$.
3. Comme précédemment, on montre d'abord que h envoie P dans P, ce qui provient de la question précédente, on inverse l'expression, et on fait de même sur cette nouvelle expression (an remarquant qu'elle vérifie la même hypothèse sur $ab - bc$.

[comp051]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.20 – Plusieurs pistes possibles :

1. Par l'absurde. Considérer la partie imaginaire modulo 4^2. En déduire $n \equiv 0$ [4]. Développer $(3 + 4\,\mathrm{i})^{4m}$ par la formule du binôme, extraire la partie réelle et la partie imaginaire, et travailler modulo 5, en simplifiant en utilisant $4^2 \equiv 1$ [5] et $3^2 \equiv -1$ [5]. Recombiner les deux sommes de sorte à obtenir $2^{4m+1} \equiv 0$ [5] et conclure.
2. Ceux qui connaissent un peu l'arithmétique de $\mathbb{Z}[i]$ peuvent se rendre compte que c'en est une conséquence directe : les nombres premiers dans $\mathbb{Z}[i]$ (premiers de Gauss) sont, à multiplication près par $1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}$, les nombres premiers congrus à 3 modulo 4, $a + \mathrm{i}\,b$, et $a - \mathrm{i}\,b$, où $a^2 + b^2 = p$, p étant un nombre premier congru à 1 modulo 4. On peut montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est factoriel (ce qui signifie que la décomposition en facteurs premiers existe et est unique, à inversibles près). Ainsi, l'unique décomposition de 5^n est :
$$5^n = (2 + \mathrm{i})^n (2 - \mathrm{i})^n.$$
Or, $(3 + 4\,\mathrm{i})^n = (2 + \mathrm{i})^{2n}$. L'égalité entre les deux contredirait l'unicité de la décomposition primaire dans $\mathbb{Z}[i]$.
3. De façon beaucoup plus élémentaire, remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(3 + 4\,\mathrm{i})^n \equiv 3 + 4\,\mathrm{i}$ [5]...

[comp072]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.21 –

1. Provient de $|f(e^{\mathrm{i}\,\theta})| = 1$, en développant, regrouper les termes variant en θ : cette partie s'annule, car $|f(e^{\mathrm{i}\,\theta})|$ constante.

2. Ces couples ont carrés ayant même somme et même produit, donc solutions de la même équation de degré 2.
3. Étudier les deux cas : poser $c = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha}a$ dans le premier cas et conclure à son impossibilité ; poser $d = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\alpha}\overline{a}$ dans le second cas.
4. Vérification en calculant le module de $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})$, puis en vérifiant la surjection sur $\mathbb{U}$.

`[comp015]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.22 –

1. Chercher les racines de P_n à l'aide des racines de l'unité. P_n doit avoir $n-1$ racines. On obtient les racines $\mathrm{i}\,\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Ne pas oublier de fixer le bon coefficient dominant
2. Prendre $n = 2p+1$, évaluer en 0.

`[comp021]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.23 –

- Factoriser dans $\mathbb{C}$ par les racines de l'unité, les associer 2 à 2 pour obtenir une factorisation dans $\mathbb{R}$.
- Factoriser par $X-1$, puis écrire le quotient comme polynôme du second degré en X^2-1. Factoriser ce polynôme.
- Solution : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

`[comp025]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.24 –

1. Archi-classique : il s'agit des polynômes de Tchébychev de première et seconde espèce. Partir de la formule de Moivre et développer à l'aide du binôme.
2. L'égalité provient de $U_{n-1}\left(\frac{1}{p}\right) = 0$. Étudier ensuite la parité des termes de la somme.
3. Justifier que $T_{n/2}(1/p) = 0$, et simplifier. Montrer que la somme est paire. Conclure.

Suites et séries

`[sui003]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.25 –

1. Par définition de la limite, avec $A = u_0 + 1$, se ramener à un ensemble fini.
2. Discuter suivant que (u_n) est constante ou non, et dans le deuxième cas, suivant qu'il existe des éléments strictement plus grands que la limite ou non. Adapter alors le 1, en choisissant ε suffisamment petit pour qu'il reste un élément hors de $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$.
3. Dans l'esprit des questions précédentes : pour tout n_0, $\{u_n, n > n_0\}$ admet un maximum (à cause de la positivité). Construire récursivement une suite d'indices se plaçant en chacun de ces max, en prenant pour n_0 l'indice précédemment trouvé.

   Alternative par l'absurde : Si c'est faut, on se place au-delà du dernier n vérifiant cela, et on construit une suite extraite strictement croissante.

`[sui020]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.26 –

1. Si ℓ fini, se ramener à 0 par translation. Contrôler les derniers termes par $\frac{\varepsilon}{2}$ dès que possible ; le début de l'expression tend vers 0, donc peut être mise dans un autre $\frac{\varepsilon}{2}$ pour n assez grand. Principe à adapter pour une limite infinie.
2. Cesàro appliqué à $u_n = v_{n+1} - v_n$.
3. Se ramener à 2 par ln

4. Utiliser 3. Réponse : 4.

[sui081]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.27 –

1. Définition de la convergence, et inégalité triangulaire pour majorer $|u_n - u_m|$ en passant par ℓ.
2. L'existence provient de la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$, la croissance par inclusions. Pour majorer $|u_n - \ell|$, utiliser l'inégalité triangulaire pour passer par M_k suffisamment proche de ℓ et u_m suffisamment proche de M_k, tout en s'arrangeant pour être sûr que u_n et u_m seront eux aussi proches l'un de l'autre.

[sui045]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.28 –

1. L'hypothèse montre qu'elle est monotone.
2. Par exemple, si cette limite est strictement positif, minorer $u_{n+1} - u_n$ à partir d'un certain rang et sommer.
3. Ce qui précède permet de déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$.

[sui114]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.29 – Montrer que la seule limite possible est 4 et former $u_{n+2} - 4$; factoriser par $(a+b)(a-b)$, et donner une inégalité satisfaite par les termes de la suite $w_n = \sqrt{u_n} - 2$, après avoir justifié que u_n est supérieure à 1 à partir d'un certain rang. Conclure par majoration.

[sui018]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.30 –

1. Remarquer que $[a, +\infty[$ est stable par f définissant la récurrence, que f est croissante sur cet intervalle, et que tout s'y ramène. On obtient $u_n \longrightarrow \sqrt{a}$.
2. Récurrence.
3. Par itération, on obtient : $|u_n - \sqrt{a}| \leqslant \dfrac{(u_1 - a)^{2^{n-1}}}{(2\sqrt{a})^{2^{n-1}-1}}$.
4. Réponse : $n = 8$. La convergence est extrêmement rapide : on double à peu près le nombre de décimales correctes à chaque itération. C'est en fait un cas particulier de méthode de Newton pour la résolution d'équations numériques, et cette convergence rapide est une caractéristique de cette méthode (en cas de convergence...)

[sui113]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.31 –

1. (a) Par récurrence immédiate, les suites sont strictement positives puis croissantes à partir du rang 2. Remarquer qu'on a alors un minorant $(4n+2)u_2$
   (b) Par récurrence
   (c) Exprimer $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ comme somme d'une série alternée (utiliser un telescopage à partir de 2). Les deux suites sont alors adjacentes (technique usuelle)
   (d) Remarquer que la différence à la limite est majorée par la différence entre deux termes consécutifs.
2. Trouver λ et μ par les conditions initiales, puis récurrence
3. Exprimer 1(c) sous forme d'un équivalent, et en déduire en fonction de β_n, un équivalent de u_n lorsque $\lambda\ell + \mu \neq 0$. Discuter suivant le signe. Le cas où c'est nul nécessite qu'on y regarde de plus près. Utiliser pour cela 1(d). Das ce cas, la limite est nulle.

[sui115]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.32 – Étudier u_{4n} (étudier les composées de f et g.) Une étude un peu pénible de point fixe (mais on pourra pour cela remarquer que f et g ont des points fixes communs, qui sont également points fixes de leur composée, cela permet de trouver facilement une factorisation).

[sui012]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.33 –

1. Théorème de la bijection.
2. Étudier la monotonie en déterminant le signe de $P_{n+1}(x_n)$ (ce qui permet de comparer $P_{n+1}(x_n)$ et $P_{n+1}(x_{n+1})$).
3. Réexprimer P_n en utilisant la formule de sommation des suites géométriques. Passer à la limite, sachant que $\ell < 1$ (car (x_n) décroît).
4. Récupérer l'expression de $x_n - \frac{1}{2}$ à partir de l'égalité $P_n(x_n) = 0$, réexprimé par sommation. Montrer que $\ln(2x_n) \underset{+\infty}{\sim} x_n^{n+1}$, et en déduire $(n+1)\ln(x_n) = -(n+1)\ln(2) + o(1)$, ce qui permet de passer à l'exponentielle.

[sui138]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.34 –

1. Théorème de la bijection.
2. $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} - \alpha_n^n - \alpha_n \leqslant 0 = f_n(\alpha_n)$, car $\alpha_n \in]0,1[$. On en déduit la décroissance de (α_n). En déduire $n\alpha_n \to 1$, ce qui permet de répondre à cette question et la suivante.
4. Minorer $f\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ en ne gardant que 3 termes du développement du binôme. Conclure que $\beta_n \leqslant 1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, puis $\beta_n \to 1$.
5. Appliquer ln à la relation $f_n(\beta_n)$. Réponse : $\beta_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

[ser108]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.35 – Justifier que la série diverge ssi $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k^{i_k}}$ tend vers $+\infty$.

En considérant d'abord les sommes partielles de rang m, montrer que ce produit est minoré par $\sum\limits_{j=1}^{s} \frac{1}{j}$, où $[\![1, s]\!]$ est constitué d'entiers dont la décomposition en facteurs premiers n'utilise que les n premiers nombres premiers, en multiplicité inférieure ou égale à m.

[ser099]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.36 –

- Si $\alpha > 1$, comparer $\frac{u_n}{U_n^\alpha}$ et $\displaystyle\int_{U_{n-1}}^{U_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
- Si $\alpha = 1$, en éliminant le cas de divergence grossière, comparer à $\sum \ln(U_{n-1}) - \ln(U_n)$.
- Si $\alpha < 1$, comparer à $\sum \frac{u_n}{U_n}$.

[ser107]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.37 –

1. Encadrer $\displaystyle\sum_{k=p^{n-1}}^{p^n-1} u_k$.
2. Montrer que $\sum \min(2^n u_{2^n}, 1)$ converge ssi $\sum 2^n u_n$ converge.

Grâce à ce critère de condensation, on peut obtenir une preuve très rapide de la nature des séries de Riemann, puis des séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$ (le critère de condensation nous ramène pour ces dernières à des séries de Riemann). Faites-le pour voir !

[ser169]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.38 –

1. $\ln(u_n) \sim_{+\infty} -\beta \ln(n)$. On ne peut pas en déduire un équivalent de u_n, mais un encadrement suffisamment fin pour pouvoir comparer à $\frac{1}{n^\beta}$ (ou presque, il faut modifier un tout petit peu l'exposant).
2. Même principe, il faut contrôler les choses un peu plus finement, en $O(1)$, ou même en $o(1)$, qui nous permet d'avoir un équivalent.

3. Encore pareil, il faut alors un développement asymptotique à 2 terme de la stg $\frac{1}{n\ln(n)}$, qui est $\ln(\ln(n)) + c + o(1)$.

[ser056]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.39 – Regrouper les termes de la série en paquets $\sum_{k=\alpha_n+1}^{\alpha_{n+1}} u_n = S_{\alpha_{n+1}} - S_{\alpha_n}$ de termes consécutifs de même signe, et montrer que ça ne tend pas vers 0.

[ser129]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.40 – Regrouper les termes de la série en paquets $\sum_{k=\alpha_n+1}^{\alpha_{n+1}} u_n = S_{\alpha_{n+1}} - S_{\alpha_n}$ de termes consécutifs de même signe. Montrer que ces paquets forment une suite décroissante de limite nulle. Quel théorème semble alors adapté ?

[ser055]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.41 – Pour la deuxième, faire un DA en $\frac{1}{\sqrt{n}}$, jusqu'à $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. On obtient la divergence.
Pour le commentaire, remarquez que les termes généraux sont égaux, mais pourtant...

[ser140]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.42 – Comme les termes sont positifs, on n'est pas obligé de prendre des précautions particulières, on peut faire le calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$, et montrer que la somme S vérifie $S < +\infty$.
Par théorème d'associativité (i.e. groupements de termes), sommer à $p+q$ constant.

[ser142]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.43 – Remarquer que tout entier naturel non nul N s'écrit sous la forme $N = (2k+1)2^n$. Trier les termes de la série géométrique suivant la valeur de n dans la décomposition $N = (2k+1)2^n$ de l'exposant.

Régularité des fonctions d'une variable réelle

[cnt006]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.44 – Avec $y = 0$, montrer qu'il existe $B > 0$ tel que f soit de signe constant sur $[B, +\infty[$. Discuter suivant le signe, ou se ramener au cas > 0 en considérant $-f$. Dans ce cas, étudier la limite en $-\infty$ d'abord, en prenant $y = -A$, $A > 0$, et en montrant qu'il existe B' tel que $f + A$ ne change pas de signe sur $]-\infty, B[$. Déterminer le signe de $f - A$, par l'absurde, en contredisant la surjectivité (dans un des deux cas f est minorée). Pour cela, utiliser le théorème de compacité. En déduire la limite en $-\infty$. Par un argument similaire, déterminer la limite en $+\infty$.

[cnt142]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.45 – Montrer que $\bigcap_{n>0} f\left(\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \{f(x)\}$. Une inclusion est facile. Pour l'autre, considérer y dans l'intersection et en déduire une certaine suite, qui converge nécessairement vers un antécédent de y (pourquoi ?)

[cnt196]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.46 – Prendre c dans l'image, et ses deux antécédents, prendre un max ou min distinct de c dans le segment délimité. Étudier la monotonie sur les deux moitiés d'intervalle. Montrer que le maximum n'est atteint qu'une fois.
C'est faux pour la généralisation. Peut-être en imposant le nombre d'antécédants constants ? Je vous laisse réfléchir à ça.

[cnt156]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.47 – Grosse récurrence, en progressant sur les intervalles $]2k, 2k+2]$. Un peu technique, mais sans difficulté.

[cnt014]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.48 – Récurrence pour l'expression. S'en servir pour former les taux d'accroissement, en utilisant les CC.

[cnt039]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.49 – Exprimer f comme fonction réciproque et utiliser des résultats du cours.

[cnt158]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.50 –

1. Il nous faut une infinité de marges d'erreur ε_n, dont la somme totale vaut ε. Il faut donc les prendre de plus en plus petits.
2. Le faire d'abord sur un intervalle $[-n, n]$. Considérer $U = f'-1(]-\varepsilon, \varepsilon[)$. Quelle est sa description géométrique ? Que peut-on dire de f sur les sous-intervalles de U ?

[cnt040]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.51 – Rolle. Montrer que $x \mapsto P(x) - e^x$ admet une dérivée d'un certain ordre sans zéro.

[cnt145]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.52 – Pour la question 3, utiliser le théorème de Rolle, en remarquant qu'à chaque dérivation, jusqu'à l'ordre souhaité, on a aussi annulation en 0 et en $+\infty$. Il faut de ce fait utiliser une version étendue de Rolle, fonctionnant aussi avec une limite en $+\infty$ (et savoir la démontrer !).
Le polynôme L_n est donc scindé et on peut utiliser les relations de Viète.
Pour la dernière question, montrer qu'il ne peut pas y avoir plus de racines que celles déjà trouvées, sinon l'argument de la 3 donnerait trop de racines pour L_n.

[cnt150]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.53 – Récurrence sur n : simplifier par $\mathrm{e}^{Q_n(x)}$ et dériver.

[cnt024]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.54 – Qu2 : on a des informations en 2 points. Les exploiter ! Qu3 : L'IAF revient à intégrer un majorant constant de $|f'|$. On se rend compte que ce n'est pas suffisant pour conclure. Mais ici, on dispose d'un majorant non constant, donc potentiellement meilleur qu'un majorant constant. On peut donc espérer améliorer l'IAF. Qu4 : Pour quelle valeur de α le majorant précédent est-il le moins bon ?

[cnt268]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.55 – Par récurrence sur n. Pour l'hérédité, écrire $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ sous la forme $(1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1}x_{n+1}$, afin d'exploiter la convexité de f. Exprimer y en fonction des x_i. Utiliser l'HR pour majorer $f(y)$.

[cnt027]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.56 –

1. Utiliser Jensen avec la fonction ln.
2. Comparer à une intégrale
3. Conséquence immédiate des 2 questions précédentes

[cnt227]

Indications ou solutions pour l'exercice 2.57 –

1. Considérer $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Puis $x-1 \sim_{+\infty} x$.
2. Dans question 1, on peut remplacer 1 par y. La convergence vers ℓ se fait en croissant. Cela permet de montrer la croissance de $x \mapsto f(x)-x$.

[cnt149]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.58 –
- Montrer $f\left(\frac{1}{2^n}(x_1+\cdots+x_n)\right) \leqslant \frac{1}{2^n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n))$. En déduire l'inégalité de convexité pour tout λ dyadique dans $[0,1]$.
- En supposant que f n'est pas continu en a, trouver $a_n \longrightarrow a$ tel que $|a_n - a| > \varepsilon$. En voyant a comme un point intermédiaire dans une relation du type trouvé dans le premier point, contredire lecaractère borné de f.
- Utiliser la densité des dyadiques pour conclure.

[cnt244]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.59 – Cette fonction est convexe. L'inégalité de Jensen donne d'abord une inégalité où les a_k sont tous égauc à 1 dans un premier temps.

[cnt197]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.60 – Sens direct : utiliser un module de continuité uniforme pour contrôler $f(x_n)-f(y_n)$.
Sens réciproque : par contraposée, si f n'est pas uniformément continue, fixer ε convenable, et considérer des mu_n tendant vers 0, permettant de contruire x_n et y_n vérifiant une certaine propriété.

[cnt199]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.61 – Par critère séquentiel, en construisant (x_n) convergeante tq $f(x_n) \to +\infty$, puis extraire (y_n) de (x_n) convenable.
Ou alors, par contraposée : on contrôle f en des points assez régulièrement répartis, puis entre ces points par continuité uniforme.

[cnt206]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.62 – Théorème de Heine sur $[0,2T]$, ce qui donne la c.u. sur tout $[kT,(k+2)T]$ avec le même module de c.u. Les chevauchements permettent de recoller car pour tout (x,y) tels que $|x-y|<T$, il existe k tel que $x \in [kT,(k+2)T]$.

[cnt202]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.63 – La continuité uniforme permet de contrôler les variations sur un intervalle de longueur t.

[tay061]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.64 – Majorer le reste intégral pour montrer qu'il tend vers 0.

[tay113]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.65 – Pour la première question, faire une étude de fonction. On pourra distinguer les cas $x<0$ et $x \geqslant 0$. Utiliser ensuite la formule de Taylor avec reste intégral, et majorer $\frac{x-t}{1+t}$. L'inégalité de Taylor-Lagrange n'est ici pas suffisante pour les valeurs négatives de x.

[tay112]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.66 – La limite de (v_n) s'obtient en remarquant qu'elle peut être majorée par une suite géométrique. Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour conclure. L'irrationnalité de e s'obtient en majorant $n!\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ par 1, pour obtenir un encadrement strict de $n!$e entre deux entiers consécutifs. Choisir convenablement n.

Intégration

`[int152]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.67 – Majoration facile, faisant intervenir un $(b-a)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$.
Minorer par $M-\varepsilon$ sur un certain intervalle, et minorer l'intégrale par la même intégrale restreinte à cet intervalle. On obtient un minorant qui tend vers $M-\varepsilon$
Le ε empêche de conclure directement par théorème d'encadrement. Revenir à la définition, en encadrant l'intégrale àpcr entre $M-2\varepsilon$ et $M+2\varepsilon$.

`[int149]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.68 – Par somme de Riemann, et inégalité de Jensen (vu dans un autre exercice).

`[int119]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.69 –

1. C'est le reste d'une série géométrique
2. Majorer la différence entre l'intégrale et la somme partielle en intégrant l'inégalité précédente, en utilisant l'IT. Passer ensuite à la limite.

   Faire ensuite un changement de variable pour absorber multiplicativement le 16, et combiner les intégrales pour obtenir l'égalité voulue.
3. Le polynôme peut se factoriser par X^2+2 et par $X-1$.
4. DES et calcul.

`[int014]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.70 –

1. (a) Majorer l'intégrande par $\frac{M^n}{n!}$, où M est un majorant de $x \mapsto x(bx-a)$.
   (b) Leibniz, ou plus simplement, écrire $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_{2n} X^{2n}$, et voir ce qu'il se passe lorsqu'on dérive k fois et qu'on évalue en 0. Pour les évaluations en $\frac{a}{b}$, on pourra faire le changement de variables $y : x - \frac{b}{a}$.
2. IPP itérée à l'ordre $2n+1$, et question précédente. La contradiction provient des propriétés des suites convergentes d'entiers.

`[int105]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.71 –

1. (a) IPP (intégrer un facteur sin)
   (b) L'itération de la formule précédente permet de calculer les I_{2k} en fonction de I_0 et I_{2k+1} en fonction de I_1. Il y a des produits d'entiers pairs consécutifs, ou d'entiers impairs consécutifs, qu'on sait exprimer par factorielles (pour les impairs, multiplier et diviser par les pairs manquants)
   (c) Exploiter la monotonie de I_n.
   (d) Considérer $\lim \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$, en exploitant les questions précédentes.
2. (a) Regrouper les 2 ln, simplifier et faire un DL.
   (b) Comparaison à une série téléscopique convergente.
   (c) Se ramener à la limite de la question 1.

`[int106]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.72 – Intégration par parties, pour faire apparaître un $\frac{1}{n}$, puis majorer l'intégrale, f' étant bornée (pourquoi ?)

`[int122]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.73 –

1. Changement de variable.
2. Considérer $f(t) = t^{p-1}$, et se ramener à une majoration de $\displaystyle\int_v^{u^{p-1}} t^{q-1}\,\mathrm{d}t$. Discuter suivant que $v \leqslant u^{p-1}$ ou $v \geqslant u^{p-1}$.

Probabilités et combinatoire

`[comb031]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.74 –

1. Se ramener à une situation d'équiprobabilité pour pouvoir faire des dénombrements : on peut pour cela supposer que la liste (infinie) des choix des tirages dans la poche gauche ou droite est établie à l'avance. On peut remarquer ensuite qu'au bout de $2N + 1$ tirages au plus, l'expérience décrite s'arrête. On peut donc se contenter de l'étude des $2N+1$ tirages et regarder dans l'ensemble des successions de $2N+1$ choix, lesquelles vont faire qu'on tombe en panne. On peut représenter les choix sous forme de chemin monotone dans le plan. L'expérience s'arrête au moment où l'on sort strictement du carré $N \times N$. On tombe en panne d'allumettes si le chemin sort stritement du carré par le coin supérieur droit. Compter les chemins de longueur $2N + 1$ sortant du carré par ce coin.
2. Il suffit d'effectuer un tri des chemins de longueur $2N + 1$ suivant l'endroit par où ils sortent du carré, sachant qu'ils sortent tous du carré.

`[comb045]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.75 – Réponses : 2^{n^2}, 2^{n^2-n}, $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $2^n 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$, $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Pour les relations antisymétriques, remarquez que pour une paire $\{x, y\}$, avec $x \neq y$, on a 3 possibilités (une et une seule relation entre les deux dans un sens ou dans l'autre, ou pas de relation du tout).

`[comb003]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.76 –

1. Considérer l'application de l'ensemble des surjections vers l'ensemble des partitions à k parts qui à une surjection f associe la partition $\{f^{-1}(\{j\}),\ j \in [\![1, k]\!]\}$ des images réciproques de chaque élément de $[\![1, k]\!]$, et appliquer le lemme du berger.
2. Pour former une partition dont $\{n\}$ n'est pas une part, former une partition de $[\![1, n-1]\!]$ et ajouter n à l'une des parts. De combien de façons différentes obtient-on ainsi une partition donnée de $[\![1, n-1]\!]$ dont $\{n\}$ n'est pas une part ?
3. Utiliser la question 1.

`[comb054]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.77 – Se comprend bien avec les cycles. On passe de $D_n D_{n+1}$ en insérant $n + 1$ dans un cycle déjà existant. On passe de D_{n-1} à D_n en ajoutant une transposition (nécessitant le décalage d'une partie des éléments).

`[comb006]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.78 – Généralisation de Vandermonde : faire un bouquet constitué de tulipes rouges, tulipes jaunes, tulipes blanches, tulipes noires, roses rouges, roses roses, roses blanches, lys (blancs, évidemment) etc.

`[comb015]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.79 –

1. Principe de l'interrupteur (bijection rajoutant ou enlevant un élément fixé) pour comparer le nombre de sous-ensembles de cardinal pair et le nombre de sous-ensembles de cardinal impair. La bijection est ici $X \mapsto X \vartriangle \{1\}$, ou $\vartriangle$ est la différence symétrique.

Réponse : 0 (sauf si $n = 0$)

2. Principe du comité-président, sans fixer la taille du comité. Réponse : $n2^{n-1}$.
3. « Bijecter » les comités pairs et les comités impairs par un principe de l'interrupteur comme dans la question 1. Attention, le présient n'aime pas qu'on se débarrasse de lui ! (avoir un interrupteur de secours !). Réponse : 0 sauf si $n = 1$ (correspondant au cas où on n'a pas d'interrupteur de secours, le président passe à la trappe !)
4. Principe du comité-président dans le Meilleur des Mondes : le comité peut être formé d'Alphas ou Bêtas, mais le préident est nécessairement un Alpha. Réponse : $n\binom{2n-1}{p-1}$.
5. Un bouquet de tulipes et roses, en triant suivant le nombre de tulipes. Réponse : $\binom{2n}{n}$; ce n'est en fait qu'un cas particulier de Vandermonde.
6. Le principe combinatoire de Vandermonde ne s'applique pas bien ici. Il vaut mieux faire le choix de deux sous-ensembles dans le même ensemble de cardinal n, par exemple $[\![1, n]\!]$. Le carré du coefficient binomial est le choix d'un couple (A, B) formé d'un sous-ensemble A de cardinal k et d'un sous-ensemble B de cardinal $n - k$. Utiliser le principe de l'interrupteur (encore), en faisant passer un élément de A vers B ou l'inverse. Prendre cet élément le plus petit possible (comment s'exprime-t-il avec les différence symétrique). Il y a un cas où ce n'est pas possible de trouver un tel élément. C'est ce qui donne notre second membre. Réponse : $(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}$ si n est pair, 0 sinon.

`[gen015]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.80 – Par dénombrement, le nombre total de couples étant 4^n

1. Choisir un élément (qui sera l'union). Décider s'il est dans A ou dans B
2. Adapter la définition d'une fonction indicatrice, en autorisant ici 3 valeurs (par exemple 0 si $x \in A \setminus B$, 1 si $x \in B \setminus A$ et 2 si $x \in A \cap B$). Rép : $\left(\frac{3}{4}\right)^n$
3. Choisir l'intersection, puis partager le reste en 3 zones de taille quelconque, suivant le même principe qu'avant (les éléments de A, ceux de B et ceux qui ne sont ni dans A, ni dans B). Réponse : $\frac{n3^{n-1}}{4^n}$
4. Là encore 3 zones. Lesquelles ?

`[gen074]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.81 – Montrer que $R = Q^2$ et trouver une contradiction sur la multiplicité des racines. C'est valable avec des dés à n faces, si ça existe ($n \geqslant 2$).
Plus amusant, c'est aussi valable pour deux dés pipés de façon pas forcément identique. C'est un peu plus compliqué, mais ça reste abordable avec des techniques de Sup (considérer la décomposition en facteurs irréductibles)

`[gen001]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.82 –

1. FPC
2. Intoduire l'événement D_n : les disques sont de compositeurs 2 à 2 distincts, et trouver une relation entre $\mathbb{P}(D_{n+1})$ et $\mathbb{P}(D_n)$, à l'aide d'un conditionnement.
3. (a) Bayes. Cela nécessite de connaître $\mathbb{P}(B_n)$ (soit par le calcul en formant une relation de récurrence, soit par un argument de symétrie)
   (b) Jouer avec les probas conditionnelles, à la façon de Bayes
   (c) Idem.

`[gen004]`

Indications ou solutions pour l'exercice 2.83 – Définir X_n le vecteur des probas de se retrouver respectivement en A, B, C ou D au n-ième pas.
À l'aide de la FPT sur le SCE (A_n, B_n, C_n, D_n) (être en A, B, C, ou D après n pas), exprimer une relation matricielle $X_{n+1} = MX_n$.
Calculer M^n en décomposant M comme CL de deux matrices qui commutent. On pourra distinguer les cas n pair et n impair (intuitivement, pourquoi est-il pertinent de faire cette disjonction de cas ?)

Variante de l'exercice : rajouter la possibilité de faire un pas en diagonale, avec une proba r telle que $p+q+r=1$. Même principe, mais c'est un peu plus technique.

`[vard002]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.84 –

1. Combinatoire. $\mathbb{E}(X) = \frac{2n+1}{n+1}$. Testez la cohérence intuitive.
2. Considérer Y : rang d'apparition de la 2e boule blanche.

`[vard122]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.85 –

2. Choisir les chaussettes de paires distinctes tirées en choisissant d'abord la paire, puis la chaussette dans la paire (en supposant toutes les chaussettes discernables)
3. Classique, en partant de l'expression initiale de l'espérance, et en y remplaçant $\mathbb{P}(X=n)$ par $\mathbb{P}(X > n-1) - \mathbb{P}(X > n)$, puis séparer la somme en 2, décalage d'indice sur l'une d'elles, rassembler puis simplifier.
4. Trier les sous-ensembles de $[\![1, 2n+1]\!]$ de cardinal au moins $n+1$ selon la valeur de son $n+1$-ième élément, qui peut valoir $2n-k+1$, avec $k \in [\![1,n]\!]$. Choisir les n précédents, puis les suivants en nombre quelconque.
5. Exprimer $\mathbb{E}(X)$ en se servant des deux questions précédentes. La demi-somme des coefficients binomiaux se calcule par un argument de symétrie.

`[vard125]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.86 – Indication valable pour toute variable calculant un min/max : Exprimer d'abord la fonction de répartition, i.e. $\mathbb{P}(X \leqslant n)$ (ou $\mathbb{P}(X > n)$, selon qu'on veut le min ou le max, l'une des deux est plus simple) plutôt que les probabilités ponctuelles $\mathbb{P}(X = n)$. Cela ramène à des unions ou intersections.

`[vard133]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.87 –

1. Notant X_n le nombre de marches franchies, X'_n le nombre de pas double, reconnaître la loi de X'_n, et trouver une relation simple entre X_n et X'_n.
2. (a) Discuter suivant la nature du premier pas.
   (b) Former une relation de récurrence pour $u_n = E(Y_n)$.
3. De même, discuter suivant le premier pas pour obtenir une relation de récurrence sur n.

`[vard136]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.88 – FPT sur le SCE défini par X. Ou décrire chaque $[Y = k]$ comme union de 2 cas. On obtient $\mathbb{E}(Y) = np + \frac{n+1}{2}(1-p)^n$. Essayez de vous ramener à $\mathbb{E}(X)$ pour ne pas avoir besoin de refaire le calcul de la somme binomiale.

`[vard138]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.89 – Introduire des variables aléatoires de Bernoulli X_k modélisant le fait que le jeton k peut ou non être dans la main. Exprimer X en fonction des X_k. Montrer que $X_k \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$, en utilisant la FPT sur le SCE défini par le nombre de jetons tirés.
Réponse : $\frac{n(n+1)}{4}$, ce qui est assez logique par symétrie de la situation (le passage au complémentaire ne modifie pas les données de l'expérience), ceci représentant la moitié de la somme totale.

`[vard014]`
Indications ou solutions pour l'exercice 2.90 –

1. La somme doit faire 1, $\lambda = \frac{4}{n^2(n+1)^2}$
2. Sommer sur les valeurs possibles de Y pour obtenir la loi conjointe de X. Les variables sont indépendantes.

3. On en déduit la covariance et l'espérance de XY, en calculant d'abord $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
   Réponse : $\mathbb{E}(XY) = \frac{2n+1}{3}$.

[vard021]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.91 –

1. Combinatoirement, ou par formule des probabilités totales, un événement ponctuel lié à (X, Y) fixant complètement les couleurs des premiers tirages. Inutile de s'intéresser aux tirages suivants.
2. Utiliser le théorème de transfert pour calculer $\mathbb{E}(XY)$.
   Réponse : $\rho(X, Y) = \frac{1}{2}$.
   Commentaire : c'est positif, ce qui traduit que X et Y ont tendance à varier dans le même sens. C'est logique, plus on doit attendre la 1e boule blanche, plus cela repousse le rang d'apparition de la 2e boule blanche.

[vard024]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.92 –

1. $Y_n \sim \mathcal{B}(1, p^2)$ (calculer $\mathbb{P}(Y_n = 1)$).
2. Distinguer suivant que $i = j$, i et j consécutifs, ou non. Que dire dans le 3e cas ?
3. Par double-somme des covariances. Pour mieux s'en sortir dans la gestion du calcul, il peut être intéressant de remarquer que pour une famille $(Z_1, \dots, Z_n)$ de variables aléatoires
   $$\mathbb{V}(Z_1 + \cdots + Z_n) = C^\top AC,$$
   où $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = (\mathrm{cov}(Z_i, Z_j))_{1 \leqslant 1, j \leqslant n}$.
   Autrement dit, $\mathbb{V}(Z_1 + \cdots + Z_n)$ est la somme des coefficients de la matrice A. Or, dans la situation qui nous intéresse, les coefficients se placent sur 3 diagonales, et sont constants sur chacune de ces 3 diagonales.
   Réponse : $np^2(1 - p^2) + 2(n-1)p^3(1-p)$.
4. En déduire $\mathbb{V}(M_n) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ et utiliser une inégalité du cours.

[vard147]
Indications ou solutions pour l'exercice 2.93 – Bien prendre le temps de comprendre l'exercice, et les modalités de tirage, avec cette alternance de tirages avec et sans remise.

1. Le fait d'obtenir une BN au tirage $2j + 1$ fixe complètement les tirages imparis précédents. Utiliser la FPC.
   Réponse $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. De même, un événement ponctuel lié à Y détermine complètement les premiers tirages.
3. Encore une fois, les événements qui nous intéressent déterminent la couleur à beaucoup (tous ?) de tirages, et la FPC permet de conclue
4. Exprimer X en fonction des X_i. Pour le calcul des covariances, distinguer suivant la parité. On pourra commencer par exprimer $\mathbb{P}(X_{2i+k} = 1 \mid X_{2i} = 1)$. Si je ne me suis pas trompé,
   $$\mathbb{V}(X) = \frac{(n-1)(2n+1)}{n^2} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}.$$

3 Algèbre

Ce chapitre et le précédent proposent des exercices de révision, certains étant de bon niveau. Ceux-là sont plutôt destinés aux étudiants déjà à l'aise sur ces notions (donc connaissant bien leur cours et au point sur tous les aspects techniaues développés dans le chapitre 1), et désireux de se confronter à des exercices un peu plus durs. Un certain no ;bre de ces exercices (mais pas tous) sont accompagnés d'indications disponibles dans un document séparé. Il est normal de devoir passer du temps de réflexion sur chaque exercice, y compris avec les indications. Il n'est pas nécessaire d'avoir une approche exhaustive, vous pouvez picorer un peu dans tous les paragraphes, pour avoir une vue d'ensemble.

Arithmétique et structures algébriques

[ari006]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.1 –

1. Considérer $n < m$ et un facteur p premier de F_n. Justifier que $2^{2^m} \equiv 1\ [p]$.
2. Chaque F_n a des facteurs premiers distincts des précédents.

[ari012]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.2 – Considérer une relation de Bézout, puis tous les termes $ax+by$, et rajouter la relation de Bézout pour récupérer tous les termes entre $ax+by$ et $ax+(b+1)y$, en choisissant b suffisamment grand pour absorber le signe négatif de la relation initiale. Éventuellement échanger le rôle de a et b. La valeur minimale est $m_0 = (a-1)(b-1)$.

[ari020]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.3 –

1. Par récurrence, à l'aide de la relation définissant F_n.
2. Peut se faire par récurrence sur m à n fixé. Ou, plus amusant, par un argument matriciel, en définissant $X_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$, et en écrivant $X_{n+1} = AX_n$, où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Les expressions $X_m = A^m X_0$ et et $X_{m+1} = A^m X_1$ permettent d'exprimer les coefficients de A^m en fonction de F_m, F_{m+1} et F_{m+2}. Écrire alors $X_{n+m} = A^m X_n$, cela donne l'identité voulue. Cette méthode peut paraître plus lourde que la récurrence, mais elle permet de trouver la formule si on ne la connaît pas à l'avance (condition nécessaire pour pouvoir faire la récurrence), et elle peut s'adapter à d'autres situations. Par exemple exprimer F_{3n} en fonction de F_n et ses voisins (en exprimant $A^{3n} = (A^n)^3$).
3. Utiliser la relation précédente pour montrer que $F_a \wedge F_b = F_b \wedge (F_r F_{b-1}^{\alpha})$, et conclure avec la question 1 et l'algorithme d'Euclide.

[ari048]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.4 – Pour la 2, considérer d'abord le cas $a \wedge r = 1$. Dans le cas général, s'y ramener en divisant et remultipliant les solutions obtenues par le pgcd.

[ari049]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.5 –

1. Discuter suivant que n est impair, congru à 2 ou à 0 modulo 4.
2. Considérer une décomposition de $p_1 \cdots p_k$ comme dans la question 1. Un autre exercice de la feuille propose une autre méthode.
3. Considérer k_n l'unique entier tel que $p_1 \cdots p_{k_n} \leqslant n < p_1 \cdots p_{k_n+1}$, et montrer que $\frac{q_n}{n} \leqslant \frac{1}{p_{k_n}}$.

[ari002]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.6 – Calculer les carrés modulo 7, et remarquer qu'on ne peut pas obtenir une somme nulle modulo 7. Mais par cette technique, cela se généralise mal. Deuxième méthode : en travaillant modulo 7, par l'absurde, contredire le petit théorème de Fermat. Cela se généralise à tout premier congru à 3 modulo 4.

[ari005]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.7 – Réduire l'exposant 10^k modulo 6. Ça vaut toujours 4 pour $k \geqslant 1$. Réponse : 5.

[ari015]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.8 – À l'aide de la formule du binôme, itérée. À chaque fois qu'on a n^α congru à 1 modulo 2^β, l'écrire $1 + k2^\beta$. On obtient $n^{2^k} \equiv 1/[2^{k+2}]$
Pour la dernière question, vérifier la congruence modulo les puissances de premiers apparaissant dans la décomposition primaire de 16320. On s'aidera des premières questions.

[ari029]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.9 –

1. Adapter la preuve par l'absurde d'Euclide, en posant $p_1, \dots, p_n$ tous les nombres premiers p congrus à 3 modulo 4. Avec $\alpha = 4$, les facteurs premiers du nombre considérés sont tous congrus à 1.
2. $a^2 \equiv -1\ [d]$, puis élever à la puissance $\frac{d-1}{2}$.
3. Adapter 1 avec $(p_1 \dots p_n)^2 + 1$.

[ari063]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.10 – Déterminer le nombre de multiples de p^k dans $[\![1, n]\!]$, puis montrer que le nombre d'entiers de $[\![1, n]\!]$ dont la valuation p-adique est exactement k s'exprime comme différence de deux termes de la somme recherchée.

[ari046]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.11 – Pour tout nombre premier p, comparer les valuations p-adiques de chacun des deux membres (se ramener à la formule de Legendre).

[ari050]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.12 – Soit par la formule de Legendre, soit en simplifiant $k!\binom{p^n}{k}$.

[ari021]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.13 – Qu2 : si k premiers distincts interviennent dans n, se ramener à $\displaystyle\sum_{I \subset [\![1,k]\!]} (-1)^{|I|}$, donc comparer sous-ensembles de cardinal impair, et sous-ensembles de cardinal pair.
Qu3 : par récurrence forte, en isolant $d = n$.

Qu4 : Partir de $\sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d)$, et remplacer g par la somme le reliant à f. Intervertir les sommes en remarquant que $d \mid n$ et $d' \mid \frac{n}{d}$ équivaut à $dd' \mid n$, qui est symétrique en d et d'.
Qu5 : Montrer que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ et utiliser la formule d'inversion de Möbius. Pour chaque diviseur d de n, on pourra compter le nombre d'entiers k de $[\![0, n-1]\!]$ tels que $k \wedge n = \frac{n}{d}$.

`[str008]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.14 –

1. Archi-classique, à savoir faire. Pour le cas $a > 0$, si $a \notin G \cap \mathbb{R}_+^*$, on peut approcher a d'aussi près qu'on veut et donc trouver des points de G très proches les uns des autres. Contredit $a > 0$ à partir de ça. Ensuite, on termine à peu près comme pour les sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Pour le cas $a = 0$, trouver un point de G arbitrairement petit ε et se servir du fait qu'alors $\varepsilon\mathbb{Z} \subset G$ pour conclure.
2. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$
3. Idem. Et s'il est de la forme $a\mathbb{Z}$, contredire l'irrationnalité.
4. Application de la question précédente avec $\theta = 2\pi$. Montrer que $\cos(\mathbb{N}) = \cos(\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z})$.

`[str016]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.15 –

1. HK sous-groupe : vérification facile. Montrer que si G' est un sous-groupe contenant H et K, on a $HK \subset G'$
2. montrer que $(iii) \iff (iv)$ (en passant à l'inverse). Montrer que $(i) \implies (iii)$ et $(iii) \wedge (iv) \implies (ii)$.
3. Montrer que $(HK) \cap L = H(K \cap L)$, et en déduire que $H(K \cap L)$ est un sous-groupe de G. En déduire l'autre égalité.

`[str020]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.16 – Si G est infini, soit il possède un sous-groupe monogène (i.e. engendré par un unique élément) infini (dans ce cas, montrer qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}$), soit on peut contruire une suite infinie d'éléments x_i tels que les $< x_i >$ soient finis et 2 à 2 distincts (prendre x_{n+1} n'appartenant pas à l'union des groupes monogènes engendrés par les précédents).

`[str037]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.17 –

1. Sans difficulté par les règles de composition et d'inversion.
2. Écrire les choses proprement et comparer :
   - Pour l'associativité, écrire les 2 expressions à comparer, en faisant attention aux parenthésages, et à la signification des évaluations des applications. Utiliser le fait que φ est un morphisme.
   - (e_g, e_H) est neutre
   - $(g, h)^{-1} = (\varphi(h^{-1})(g^{-1}), h^{-1})$

   On pourra remarquer que la structure de morphisme de φ nous donne $\varphi(hk)(x) = \varphi(h) \circ \varphi(k)(x)$, et que le fait que $\varphi(h) \in \mathrm{Aut}(G)$ assure que $\varphi(h)(xy) = \varphi(h)(x)\varphi(x)(y)$.

`[str030]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.18 – Stabilité par produit : Utiliser la structure de $\mathrm{Nil}(A)$ prouvée dans un exercice antérieur.
Inverser $1 + x$ en faisant une analogie avec les séries géométriques.

`[str090]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.19 – Sous-corps : facile. Non isomophes : considérer par l'absurde $\varphi(\mathrm{i})^2$, et justifier que i et $-\mathrm{i}$ ne sont pas dans $\mathbb{Q}(j)$ (contredire l'irrationnalité de $\sqrt{3}$).

`[str043]`

Indications ou solutions pour l'exercice 3.20 – Soit $\varphi_g : x \mapsto gx$. Montrer que $\varphi_g \in \mathfrak{S}_G$, puis que $\psi : g \mapsto \varphi_g$ est un morphisme injectif. En déduire que G est isomorphe à $\psi(G)$. On peut passer ensuite à $\mathfrak{S}_n$ au lieu de $\mathfrak{S}_G$, en remarquant qu'une bijection $f : X \mapsto Y$ induit un isomorphisme entre les groupes symétriques.

[str048]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.21 –

1. Considérer $\sigma \neq \mathrm{id}$, $\sigma(i) = j \neq i$, et construire τ une transposition telle que $\tau\sigma\tau^{-1} \neq \sigma$. On pourra éventuellement regarder un cycle de σ.
2. Considérer le noyau de $\mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathrm{Int}\mathfrak{S}_n$.

[str047]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.22 –

1. Sans difficulté.
2. Sans difficulté.
3. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En étudiant les propriétés de commutativité, montrer que les images des transpositions $(i\ j)$ sont des transpositions dont l'intersection des supports est un singleton. Définir $\sigma(i)$ de la sorte, et vérifier que φ est la conjugaison par σ.
4. À ramener à un problème de conjugaison. Utiliser une description des cycles du conjugué en fonction des cycles de σ : pour que le conjugué de σ soit égal à σ il peut y avoir permutation circulaire au sein d'un même cycle, ou échanges de cycles de même longueur.
5. Considérer l'ordre de $\varphi(\tau)$, puis sa décomposition cyclique.
6. Utiliser le cardinal du centralisateur pour montrer que φ envoie transpositions sur transpositions. On pourra trouver une relation entre le centre de τ et le centre de $\varphi(\tau)$.

[str049]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.23 – (Groupes dérivés de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$)

1. Première inclusion sans difficulté. Pour la deuxième, calculer la signature d'un commutateur.
2. Trouver une relation de conjuguaison dans $\mathfrak{S}_n$, puis adapter éventuellement en composant par une transposition bien choisie.
3. σ et σ^2 sont conjugués.
4. $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles, qui sont des commutateurs.

[str132]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.24 –

1. Utiliser une relation de Bézout pour montrer que tout élément non nul de $\mathbb{F}_p$ est inversible.
2. (a) Sinon, écrire $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = ab$ et remarquer que $(a \cdot 1)(b \cdot 1) = 0$.
   (b) Ce sous-anneau est $\{k \cdot 1, k \in \mathbb{Z}\}$ (sous-anneau de façon évidente, et clairement minimal). Par définition de la caractéristique, $k \cdot 1 = \ell \cdot 1 \Longleftrightarrow k \equiv \ell\ [1]$, ce qui permet de définition une application $\langle 1 \rangle \to \mathbb{F}_p$. Vérifier que c'est un isomorphisme de corps.
3. Pour $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, avec $a \wedge b = 1$, définir $\varphi(q) = (a \cdot 1) \times (b \cdot 1)^{-1}$. Montrer que cette formule est valide pour toute représentation $q = \frac{a'}{b'}$ non nécessairement irréductible, puis que c'est un morphisme de corps injectif.

Polynômes et fractions rationnelles

[pol081]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.25 – Dériver et montrer que $P' = nQ$ ou $P' = -nQ$, où $n = \deg(P)$. En déduire une ED d'ordre 2 satisfaite par P. En déduire une relation sur les coefficients de P.

On peut plus judiceusement faire un changement de variable avant de trouver l'ED ; cela nous ramène à une famille classique de polynômes (qu'on pouvait deviner)

[pol034]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.26 – Compter les racines avec leur multiplicité. La multiplicité de chaque racine diminue de 1, et d'après d'Alembert-Gauss, la somme des multiplicité diminue de 1. Qu'est-ce que ça signifie sur le nombre de racines distinctes,

[pol087]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.27 –

1. Écrire la factorisation de P, en séparant les racines de multiplicité 1 et les racines multiples. Traduire sur les racines la divisibilité de P par P'', et compter les racines.
2. Constater que nécessairement, il existe λ tel que $P'' = \lambda Q(X-s)^\alpha$. Exprimer λ en fonction du degré de P. On trouve une ED en dérivant $Q(X-s)^\alpha$ deux fois et en comparant à l'expression précédente. Évaluer l'ED en un complexe bien choisi, pour obtenir le résultat voulu.
3. Cas $\deg(P) = 1$ ou 2 faciles. Cas $\deg(P) = 3$: les 3 racines de P se répartissent de sorte qu'une des 3 est le milieu des 2 autres.

[pol086]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.28 –

1. Classique. Rolle.
2. Montrer qu'une des dérivées admettrait sinon 0 comme racine multiple.
3. Montrer que sinon, une des dérivées admettrait plusieurs extrema locaux entre deux racines consécutives. Est-ce possible ?

[pol088]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.29 – Essayer de construire le plus de racines possibles à partir d'une racine donnée. En conclure qu'une racine est nécessairement de module 1, puis qu'elles sont racines 6-ièmes de 1. Éliminer encore pour arriver finalement aux seules racines 0 et 1. Utiliser le théorème de d'Alembert-Gauss pour exprimer P, puis réinjecter dans l'équation initiale.

[pol123]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.30 –

1. Par l'absurde, si ce n'est pas le cas, étudier le signe de $P_n - 2^{n-1}Q$ en 1, -1 et en chacun des extrema locaux de P_n, et trouver trop de zéros par rapport au degré.
2. F_x admet les n racines de P_n comme 0, ainsi que x. Cela fournit l'existence d'un zéro de $F_x^{(n)}$, par itération de Rolle.

[pol124]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.31 – Décomposer $\frac{P'}{P}$ en éléments simples et remonter les racines à l'aide des conjugués.

[pol045]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.32 –

- Trouver les racines de P (équation à résoudre : éliminer d'emblée le cas $z = -\mathrm{i}$). Un petit travail sur les exponentielles complexes amène :

$$z = \tan\left(\frac{k\pi}{n} + \alpha\right), k \in [\![0, n-1]\!].$$

- Factoriser et évaluer en 0.

Le produit est bien défini si et seulement si $e^{2\,i\,\alpha n} \neq (-1)^n$ et :

$$\prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{n}+\alpha\right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \tan(n\alpha) & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

`[pol076]`

Indications ou solutions pour l'exercice 3.33 –

1. Délinéarisation de $\sin((2n+1)x)$ (i.e. l'écrire avec des puissances de $\sin(x)$ et $\cos(x)$)
2. Chercher d'abord les racines dans $\mathbb{R}_+$, sous la forme $r = \operatorname{cotan}^2(\alpha)$.
   Quelle formule permet d'obtenir facilement la somme des racines d'un polynôme scindé ?
3. On peut se ramener à une inégalité de convexité portant sur tan d'un côté, et sin de l'autre. On peut aussi faire des études de fonctions.
4. Partir de l'expression des sommes des racines de P_n, puis encadrer.

`[pol083]`

Indications ou solutions pour l'exercice 3.34 –

- Se ramener au cas où P, Q et R sont premiers entre eux 2 à 2, et supposer $\deg(P) \geqslant \deg(Q) \geqslant \deg(R)$.
- Remarquer que si R est constant, P et Q aussi (factoriser $P^n + Q^n$ à l'aide des racines n-ièmes de -1)
- En supposant $\deg(R) > 0$, montrer que P^{n-1} divise $Q'R - QR'$
- En déduire $(n-1)\deg(P) \leqslant 2\deg(P) - 1$. Conclure.

On peut aussi commencer par montrer le lemme suivant : si $A \wedge B \wedge C = 1$, et $A + B + C = 0$, alors

$$r(A) + r(B) + r(C) = \max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) + 1,$$

où r désigne le nombre de racines distinctes.

`[pol084]`

Indications ou solutions pour l'exercice 3.35 –

1. Exprimer $P \wedge P'$ en fonction des racines de P, et compter.
2. Utiliser le fait que $P - 1$ et P sont premiers entre eux et que les deux polynômes divisent P'.
3. Montrer que $R = P - Q$ a au moins $n + 1$ zéros, n étant le degré de P (les zéros de P et de $P - 1$).

Algèbre linéaire

`[ev143]`

Indications ou solutions pour l'exercice 3.36 – Considérer la famille des vecteurs indicateurs des parties X_i (i.e. $Y_i = (\mathbb{1}_{X_i}(k))_{1 \leqslant k \leqslant n}$. Utiliser une relation non triviale entre ces vecteurs, séparer les termes de sorte à écrire une égalité entre 2 CL dont les coefficients sont tous strictement positifs. Que signifie la non nullité d'une coordonnée k du vecteur égal à ces 2 CL, en terme d'appartenance de k à une certaine union ?

`[ev030]`

Indications ou solutions pour l'exercice 3.37 – Écrire $\operatorname{Vect}(S)$ comme somme de deux Vect.

`[ev038]`

Indications ou solutions pour l'exercice 3.38 – Adapter la preuve du cours de l'existence d'un supplémentaire : considérer H de dimension maximale en somme directe à la fois avec F et G. Remarquer que si $H + F \neq E$, alors $H + G \neq E$ (par les dimensions), et leur union non plus (à quelle condition l'union de deux sev est-elle un sev ?). Rajouter à H un vecteur n'appartenant pas à cette union.
De façon équivalente, cela revient à faire une récurrence descendante sur la dimension commune de F et G. Si la dim est $n = \dim E$ c'est évident. Sinon, procéder comme plus haut en considérant $F' = F \oplus \operatorname{Vect}(x)$ et $G' = G \oplus \operatorname{Vect}(x)$, où $x \notin F \cup G$, puis appliquer l'HR.

[ev137]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.39 –

1. $\mathbb{K}$ contient le corps premier $\mathbb{F}_p$. Vérifier que c'est un $\mathbb{F}_p$-ev, donc isomorphe à un $\mathbb{F}_p^n$.
2. Considérer les racines de $X^{p^n-1}-1$ dans un $\mathbb{K}'$ sur lequel ce polynôme est scindé. Justifier qu'elles sont simples. Attention, la caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives est valide seulement en caractéristique nulle, il faut donc s'y prendre autrement. On peut constater qu'un sens reste vrai : si r est racine de multiplicité a de P, elle est racine de multiplicité au moins $a-1$ de P' (mais parfois plus). L'obtenir en factorisant P et en dérivant.

   L'ensemble de ces racines auquel on joint 0 est alors un corps de cardinal p^n.
3. Remarquer que $\mathbb{K}$ est exactement l'ensemble des racines de ce polynôme : celui-ci est scindé dans $\mathbb{K}$, et diminuer $\mathbb{K}$ fait perdre une racine.

[ev145]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.40 –

1. Par récurrence, en se servant des propriétés de φ
2. Si (x, y) libre, il en est de même de $(x, x+y)$ et $(x+y, y)$, et les 3 engendrent le même espace. Appliquer la question précédente.
3. Décomposer E en somme directe de droites, sur lesquels φ prend une valeur constante.
4. Décomposer un sev F en somme directe de droites.

[ev002]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.41 –

1. Pour tout $x \in E$, noter λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$, et montrer que pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, $\lambda_x = \lambda_y$. On pourra distinguer les cas x et y colinéaires, ou non. Dans ce deuxième cas, comparer les deux scalaires à λ_{x+y}.
2. On pourra raisonner par l'absurde, en utilisant la question 1 : pour un x tel que x et $f(x)$ ne soient pas colinéaires, construire un endomorphisme u envoyant x et $f(x)$ sur x. Pour cela, définir u en décomposant E sous la forme $E = \mathrm{Vect}(x, f(x)) \oplus S$.

[ev155]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.42 – Étudier l'injectivité de Φ avec le noyau. Montrer la bijectivité avec les dimensions. Pour la dernière question, la réciproque est facile. Pour le sens direct, raisonner par contraposée, en incluant V dans un hyperplan, noyau d'un certain h_x.

[ev157]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.43 – L'orthogonalité duale échange $+$ et $\cap$. On en déduit qu'elle conserve la supplémentarité. Pour la dimension remarquer que les éléments de F° sont déterminés par la donnée d'un élément de S^*, S étant un supplémentaire de F. Ainsi, H° est une droite de E^*. Écrire alors l'intersection d'hyperplans comme une intersection d'orthogonaux puis utiliser la première question.

[ev006]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.44 –

1. N'oublier aucune des propriétés à montrer. Pour la décomposition, comment définir un élément de $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g)$ à partir d'un élément de $\mathrm{Ker}(f \circ g)$?
2. De même. Comment construire un élément de $\mathrm{Ker}(f)$ à partir d'un élément de $\mathrm{Im}(f \circ g)$ (n'oubliez pas que f est un projecteur).
3. Comparer les membres aux expressions obtenues dans les deux premières questions. Comment construire un projecteur qui échange le rôle du noyau et de l'image d'un projecteur donné ?

[ev131]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.45 – (X) – Idéaux à gauche de $\mathcal{L}(E)$

1.
   - $g(F)$ idéal facile.
   - $f \circ g(F) = F$. Inclusion directe facile. Pour la réciproque, si $x \notin F$, construire u (par morceaux) dont le noyau est exactement F.
2. (a) Considérer $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus S$, et compléter l'image par u d'une base de S en une base de E. Construire f sur la base obtenue, de sorte que $f \circ u$ et v coïncide sur les vecteurs d'une certaine base.
   (b) Considérer p et q d'images F_1 et F_2, de noyau G_1 et G_2, puis en considérant la décomposition $E = S_1 \oplus G_1 \cap G_2 \oplus S_2 \oplus S_3$ où S_1 est un supplémentaire de $G_1 \cap G_2$ dans G_1, S_2 de même dans G_2, et S_3 un supplémentaire de $G_1 + G_2$ dans E, construire 3 projections de noyaux contenant l'un des G_i, les combiner pour obtenir un projecteur de noyau $G_1 \cap G_2$. Utiliser une question antérieure pour justifier que toutes les projections ainsi construites sont dans I.
   (c) Justifier qu'on peut se limiter aux projecteurs dans l'intersection définissant f (pour $u \in I$, il existe toujours un projecteur de I de même noyau), et considérer r dont la dimension du noyau est minimale. utiliser l'arguemnt de 1(a) pour obtenir la description de I.
   (d) $g \circ f(I) = I$. Ainsi, f et g sont des bijections réciproques.
   Étudier $g \circ f(I)$ et conclure.

`[ev141]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.46 – Ne pas se tromper dans la caractérisation par les intersections de la somme directe de n sous-espaces vectoriels. Une fois ce point bien clair, c'est sans difficulté.

`[ev053]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.47 – Considérer d'un coté un supplémentaire du noyau et de l'autre un supplémentaire de l'image, et construire g de façon adaptée à ces décompositions.

`[ev098]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.48 –

1. Considérer $u_{|\,\mathrm{Im}(v)}$. Comment passe-t-on de la première à la deuxième égalité ?
2. Immédiat.

`[ev129]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.49 – Version vectorielle : Construire S' tel que $\mathrm{Ker}(f) \oplus S'$ et $\mathrm{Ker}(g)$ aient même dimension, puis S un supplémentaire commun. Étant donné $(b_1, \dots, b_k)$ base de S, compléter séparément $(f(b_1), \dots, f(b_k))$, et $(g(b_1), \dots, g(b_k))$ en des bases de E, et définir h et k convenablement par rigidité. Version matricielle, une fois qu'on a le cours du chapitre suivant : se ramener à des matrices équivalentes à A et B (matrices de f et g dans des bases données), qu'on sait facilement relier entre elles.

`[ev130]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.50 –

- Vérifier que $f \circ g = g \circ f$ implique que f laisse $\mathrm{Ker}(g)$ stable, donc f se restreint en un endomorphisme de $\mathrm{Ker}(g)$.
- La nilpotence des u_i implique que tout endomorphisme induit par u_i sur un sous-espace stable admet un noyau non nul.
- En déduire que la dimension du noyau aumente strictement à chaque composition supplémentaire.

`[ev176]`

Matrices et déterminants

`[mat070]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.52 – Considérer un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}(BC)$ dans $\mathrm{Ker}(ABC)$, et considérer $\varphi : S \to \mathrm{Ker}(AB)$ définie par $\varphi(X) = CX$.

On peut aussi remarquer que $\text{rg}(B)-\text{rg}(AB)$ est la chute de dimension provoquée par A sur l'image de B. Comparer à l'autre différence.

[mat137]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.53 – Considérer la matrice $(\mathbb{1}_{E_i}(j))$, et justifier qu'elle est de rang k. On pourra introduire du calcul matriciel modulaire.

[mat150]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.54 –

1. Si deux matrices ont même rang, elles sont équivalentes.
2. Connsidérer un représentant privilégié des classes d'équivalence des matrices considérées. Remarquez au passage que cela donne une résolution matricielle assez efficace d'un exercice d'X du chapitre précédent.
3. Si $I \neq \{0\}$, toute matrice de rang 1 est dans I. Obtenir les autres par somme.

[mat138]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.55 – Étendre le commutateur dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et se servir de la dimension finie.

[mat085]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.56 – On pourra considérer l'image d'une certaine base.

[mat086]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.57 – Utiliser le fait que tout hyperplan est noyau de $X \mapsto \text{tr}(AX)$, et justifier qu'il suffit de trouver Y inversible tel que J_rY soit de trace nulle, où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

[mat005]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.58 – Analyse-synthèse.

[mat083]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.59 – Si u est de trace nulle, et non homothétie, considérer une base débutant par $x, u(x)$.
On pourra montrer que $\text{Ker}(\varphi)$ est l'ensemble des matrices diagonales. Donner une des deux inclusions intéressantes pour $\text{Im}(\varphi)$...

[mat082]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.60 – Premier point de vue par récurrence :

- Si un des coefficients de la colonne 1 est non nul, annuler le coeff $a_{1,1}$ par une opération sur les lignes. Vérifier que l'opération correspondante sur les colonnes ne perturbe pas. De même pour la première ligne.
- Sinon, si un coeff non diagonal est non nul, le ramener sur la première colonne ou la première ligne ; même type de vérification. On est ramené au cas précédent.
- Sinon, la matrice est diagonale. Si deux coefficients sont distincts, s'arranger pour obtenir un coefficient non diagonal non nul par une opération sur les lignes.
- Sinon, conclure.

Deuxième point de vue : ne pas chercher forcément à annuler $a_{1,1}$: montrer que si la diagonale n'est pas nulle, on peut se ramener à une matrice diagonale avec strictement plus de coefficients diagonaux nuls.

[mat105]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.61 – Faire des opérations sur les colonnes pour n'avoir des X que sur une colonne, puis développer suivant cette colonne. Évaluer en 2 valeurs pour lesquelles le déterminant est simple à calculer. Attention au cas particulier $b = c$.

[mat109]

Indications ou solutions pour l'exercice 3.62 – Se ramener à $\det(I_r + Y) = \det(Y)$ pour tout Y, où $r = \text{rg}(A - B)$.

`[mat111]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.63 – Factoriser $A^n + B^n$ avec les racines de l'unité, et regrouper les facteurs conjugués. Utiliser le fait que $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

`[mat115]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.64 –

1. Leur déterminant est non nul (étudier leur degré)
2. Le montrer dans le cas inversible. Dans le cas non inversible, se ramener au cas inversible grâce à la question 1.
3. Construire le corps des fractions et utiliser la question 2.

`[mat125]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.65 –

1. Son déterminant doit être 1 ou -1 (c'est-à-dire un inversible de l'anneau).
2. Les coordonnées doivent être premières entre elles dans leur ensemble. Le montrer par récurrence : se ramener à l'HR en divisant les $n-1$ premières coordonnées par leur pgcd d, et construire une matrice inversible d'ordre n en se servant d'une relation de Bezout entre d et la dernière coordonnée, d étant vue comme déterminant du mineur principal d'ordre $n - 1$, la dernière colonne pouvant être choisie de sorte que le mineur calé en haut à droite soit égal à un entier quelconque. S'arranger pour que le déterminant total soit une combinaison linéaire de ces 2 mineurs.

Algèbre bilinéaire

`[bil145]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.66 –

1. Calculer $B(B-A)^{-1}A(A^{-1}-B^{-1})$. On pourra faire apparaître un $B-A$, pour simplifier le terme $(B-A)^{-1}$.
2. Utiliser un autre exercice pour justifier qu'il suffit de montrer que $B(B-A)^{-1}A$ soit la matrice d'un produit scalaire. Essayer de rendre l'expression symétrique.

`[bil161]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.67 – Il y a une petite inégalité de Cauchy-Schwarz qui se cache derrière, après avoir explicité avec les coefficients.

`[bil088]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.68 – Séparer une relation entre $e_1, \ldots, e_n$ en $x = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i e_i = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j$, où les λ_i sont tous positifs. Considérer $\langle x, x \rangle$.

`[bil085]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.69 – Considérer une bon $(b_1, \ldots, b_n)$ et remarquer que $b_1+b_2 \perp b_1-b_2$. L'utiliser pour comparer les coefficients k_1 et k_2 associés à b_1 et b_2.

`[bil157]`
Indications ou solutions pour l'exercice 3.70 – Utiliser la deuxième égalité avec $x = e_j$ pour montrer que la famille est orthogonale.
Pour montrer que c'est une base, raisonner par l'absurde et considérer un vecteur non orthogonal à $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ (pourquoi en existe-t-il un ?)

[bil158]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.71 – Un des sens se fait à l'aide d'une identité remarquable classique en cas d'orthogonalité. Pour l'autre, raisonner par la contraposée en développant $\|x + \lambda y\|^2$.

[bil159]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.72 –

1. Si la famille est liée, trouver une relation entre les colonnes de $G(x_1, \ldots, x_n)$. Réciproquement, si la famille est libre, qu'est G pour le ps et cette famille ?
2. En notant M la matrice de $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, trouver une relation entre G, M et $M^\top$.
3. Cas $x \notin F$: montrer que $|\det_{\mathcal{B}}(x, x_1, \ldots, x_p)| = d(x, F)|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p)|$, en choisissant $\mathcal{B}$ bon de $G = F + \mathrm{Vect}(x)$, complétée d'une b.o.n. de F. Remarquez qu'on peut remplacer dans le déterminant x par sa composante sur le vecteur de la base dirigeant l'orthogonale de F

[bil148]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.73 –

2. Pour obtenir la relation, il suffit de montrer que $XP_{n+1} \in \mathrm{Vect}(P_n, P_{n+1}, P_{n+2})$, donc que les coordonnées sur les autres vecteurs de la b.o.n. sont nulles. Comment s'expriment ces coordonnées ?
3. Contraposée de la propriété de positivité de l'intégrale.
4. Considérer $\langle Q, P_n \rangle$. Que dire du signe de QP_n.

[bil098]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.74 –

1. (a) Pour H : $F \cap G \subset H \subset F$ facile. Si $x \in H$, $x - p_G(x)$ vérifie deux hypothèses d'orthogonalité.
   (b) Considérer des supplémentaires orthogonaux S_F et S_G de $F \cap G$ dans F et G respectivement, et montrer que $S_G \subset F^\perp$, puis décomposer E en somme directe orthogonale.
2. (a) Décomposer $g \in G$ dans $F \oplus F^\perp$.
   (b) À partir de (a) écrire une décomposition en $\oplus$ de E.

Les deux dernières questions sont des applications de ce qui précède.

[bil166]
Indications ou solutions pour l'exercice 3.75 – Sens direct par Pythagore.
Réciproque : considérer le signe du polynôme en λ défini par $\|x+\lambda y\|^2 - \|p(x+\lambda y)\|^2$, pour $(x, y) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$. Qu'est-ce que ça implique sur le nombre de racines réelles ? Conclure en explicitant les coefficients de ce polynôme.