5

QUESTIONS COURTES

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A = 0$. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$.
Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles (s'il y en a).
Montrer que, lorsque $n = p$, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $X^n = A$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, admet-elle au moins une solution ?

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1} n!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^{t/2} dt$.
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}$

5. Soit $f(x) = \ln\big(x + \dfrac{1}{1+x}\big)$.
Donner le domaine de définition de f.
Démontrer que les dérivées $f^{(n)}(0)$ d'ordre impair sont nulles, lorsque n est un multiple de 3.

6. Soit (u_n) une suite réelle positive et λ un réel strictement positif. L'équivalence suivante est-elle vérifiée ?

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lambda \Longleftrightarrow (u_n)^n \sim \lambda^n$$

7. Soit X une variable aléatoire strictement positive de densité f. On suppose que X et $1/X$ admettent une espérance. Comparer $E\big(\frac{1}{X}\big)$ et $\frac{1}{E(X)}$.

8. Soit $n \geqslant 1$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon identiquement distribué indépendant de loi de Poisson de paramètre inconnu $\lambda > 0$

On pose $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad T_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$

À l'aide de T_n, déterminer, pour n grand, un intervalle de confiance de λ au risque α donné.

9. Une urne contient initialement une boule rouge et une boule noire. On effectue dans cette urne une succession de tirages suivant le protocole suivant :

- si on tire une boule rouge, on remet dans l'urne $r > 0$ boules rouges avant le tirage suivant.
- si on tire une boule noire, on remet dans l'urne $s > 0$ boules noires avant le tirage suivant.

On s'arrête lorsque le nombre de boules d'une couleur présente dans l'urne est 10 fois plus grand que le nombre de boules de l'autre couleur.

Écrire une fonction PASCAL permettant de simuler cette expérience.

10. Soit A le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(1, 0)$.

Soit θ une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

À tout $\omega \in \Omega$, on associe le point M_ω du cercle unité d'affixe $\mathrm{e}^{i\theta(\omega)}$

Donner l'espérance de la variable aléatoire représentant la distance de A à M_ω.