Alain Troesch - Exposé du 19 octobre 2001

Scindements de foncteurs composés

Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs des espaces vectoriels finis sur $\mathbb{F}_2$ vers tous les espaces vectoriels sur $\mathbb{F}_2$. Les puissances symétrique, extérieure et divisée S^n, Λ^n et Γ^n sont des objets de $\mathcal{F}$. Pour $n = 1$, ces trois foncteurs sont égaux au foncteur identité (ou inclusion), noté Id. On note I le foncteur $I(V) = \mathbb{F}_2^{V^*}$. C'est un objet injectif. On peut définir une notion de degré (au sens d'Eilenberg-MacLane) sur $\mathcal{F}$, puis une notion de foncteur polynomial. Pour un foncteur $F \in \mathcal{F}$, on note $t_n(F)$ son plus grand sous-foncteur de degré inférieur ou égal à n, et on l'appelle foncteur de Taylor à l'ordre n de F. Il existe toujours. On obtient une filtration de F : $t_1(F) \subset t_2(F) \subset \cdots \subset F$. On sait par exemple déterminer les foncteurs de Taylor d'une puissance symétrique S^m ; les quotients successifs $t_n(S^m)/t_{n-1}(S^m)$ sont des sommes directes de puissances extérieures.

Soit $B \in \mathcal{F}$ un foncteur en algèbre de Boole. Par exemple $B = I$, ou $B = S^{2^\infty}$, où S^{2^∞} est la limite du système $S^1 \to S^2 \to S^4 \to \cdots$, les morphismes de ce système étant l'élévation au carré (morphisme de Frobenius). Le propos de l'exposé est de montrer qu'après composition (à gauche) par B, la filtration $(t_n(S^m))$ de S^m se scinde, c'est-à-dire :

$$S^m \circ B = \bigoplus_{n=0}^{m} t_n(S^m)/t_{n-1}(S^m),$$

où $t^{-1}(F) = 0$. On a un résultat similaire pour $(t_n(I))$. Enfin, on montre que le système définissant S^{2^∞} se scinde aussi après composition par B.

Ce résultat permet notamment de calculer très rapidement les groupes d'extensions $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(Id, S^n \circ B)$ en fonction des groupes $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(Id, B)$, que l'on connait pour $B = I$ et $B = S^{2^\infty}$.