Cohomologie des foncteurs composés

Alain Troesch

28 mai 1999

V. Franjou, *Extensions entre puissances extérieures et entre puissances symétriques*, J. Algebra **179** (1996), 501-522.

V. Franjou, E. Friedlander, A. Scorichenko, A. Suslin, *General linear and Functor cohomology over finite fields*, Preprint.

V. Franjou, J. Lannes, L. Schwartz, *Autour de la cohomologie de MacLane des corps finis*, Invent. math. **115** (1994), 513-538.

E. Friedlander, A. Suslin, *Cohomology of finite group schemes over a field*, Invent. math. **127** (1997), 209-270.

Structure de Ext-module des suites spectrales - 1

Théorème 1 *Pour tout $r \geqslant 1$, on peut définir une structure de* Ext*-module sur $\mathbf{I}_r(Id, \mathcal{C}^\bullet)$, telle que :*

1. *la différentielle d_r soit un morphisme de* Ext*-modules,*
2. *la structure de* Ext*-module sur $\mathbf{I}_{r+1}(Id, \mathcal{C}^\bullet)$ soit la structure quotient de $\mathbf{I}_r(Id, \mathcal{C}^\bullet)$ sur sa cohomologie,*
3. *cette structure coïncide pour $r = 1$ à la structure obtenue par la composition de Yoneda.*

Structure de Ext-module des suites spectrales - 2

Théorème 2 *Pour tout $r \geqslant 2$, on peut définir une structure de* Ext*-module sur $\mathbf{II}_r(Id, \mathcal{C}^\bullet)$, telle que :*

1. *la différentielle d_r soit un morphisme de* Ext*-modules,*
2. *la structure de* Ext*-module sur $\mathbf{II}_{r+1}(Id, \mathcal{C}^\bullet)$ soit la structure quotient de $\mathbf{II}_r(Id, \mathcal{C}^\bullet)$ sur sa cohomologie,*
3. *cette structure coïncide pour $r = 2$ à la structure obtenue par la composition de Yoneda.*

Théorème 3 *Les structures de* Ext*-modules sur chacune des deux suites spectrales d'hypercohomologie sont compatibles dans le sens que leur aboutissement est obtenu comme filtrations (en tant que* Ext*-modules) d'un* même Ext*-module. Il s'agit de la structure de Yoneda sur la cohomologie totale.*

Périodicité de la cohomologie ; Comparaison

Théorème 4 *Soit $F \in \mathcal{P}$ un foncteur polynomial homogène de degré n. Alors :*

1. *si n n'est pas une puissance de 2, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(Id, F) = 0$.*
2. *si $n = 2^h$, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(Id, F)$ est 2^{h+1}-périodique. De plus, $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(I^{(h)}, F)$ est nul en degré supérieur ou égal à 2^{h+1}, et ses 2^{h+1} premiers termes donnent une période de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(Id, F)$.*

Pseudo-exactitude

Définition 1 *Soit $T \in \mathcal{F}$. Un complexe $\mathcal{C}^\bullet$ dans $\mathcal{F}$ est appelé* suite T-pseudo-exacte *si $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(T, H_i(\mathcal{C}^\bullet)) = 0$ pour tout $i \geqslant 0$.*

Une suite T-pseudo-exacte courte *est une suite T-pseudo-exacte de la forme $0 \to A \to B \to C \to 0$, exacte (au sens fort) en A et en C.*

Définition 2 *Soit T un objet de $\mathcal{F}$ Un foncteur $F : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est dit* T-pseudo-exact *s'il transforme une suite exacte courte de foncteurs à valeurs dans $\mathcal{E}^f$ en suite T-pseudo-exacte courte.*

Proposition 1 *Soit F un foncteur T-pseudo-exact, et $\mathcal{C}^\bullet$ un complexe d'objets de $\mathcal{F}$ prenant leurs valeurs dans $\mathcal{E}^f$. Alors l'homologie du complexe $F\mathcal{C}^\bullet$ obtenu en appliquant F au complexe $\mathcal{C}^\bullet$ vérifie :*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(T, H_i(F\mathcal{C}^\bullet)) = \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(T, F(H_i(\mathcal{C}^\bullet))).$$

Etude de l'inexactitude de la post-composition par S^n

Théorème 5 *La post-composition par Λ^{2^h}, S^{2^h} ou Γ^{2^h} est Id-pseudo-exacte.*

Lemme 1 *Soit F un foncteur. Si $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(Id, F)$ est nul, alors il en est de même de $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(Id, S^n(F))$. On a un résultat similaire avec Λ^n et Γ^n.*

Corollaire 1 *La post-composition par S^n, Λ^n et Γ^n transforme les suites Id-pseudo-exactes en suites Id-pseudo-exactes. Elle conserve également les suites Id-pseudo-exactes courtes.*

Théorème de décalage

Théorème 6 *Notons F_0^n, F_1^n et F_2^n les foncteurs S^n, Λ^n et Γ^n respectivement. Soit m un entier strictement positif, $n_1, \ldots, n_m$ m entiers positifs ou nuls, et $i_1, \ldots, i_m$ m indices valant 0, 1 ou 2. On a alors la formule suivante :*

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(Id, F_{i_m}^{n_m} \circ \cdots \circ F_{i_1}^{n_1}) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^{*-\sum i_k(n_k-1)}(Id, S^{i_m} \circ \cdots \circ S^{i_1}).$$

Cohomologie de $S^2 \circ S^{2^h}$

Lemme 2 *Pour tout h dans $\mathbb{N}$ et tous $h_1, \dots, h_k$ dans $\mathbb{N}$ tels que $h_1 + \dots + h_k = h$, l'action de e_{h-1} sur la cohomologie en degré 0 de $S^{2^{h_k}} \circ \dots \circ S^{2^{h_1}}$ est nulle. Plus précisément, $S^{2^{h_1+\dots+h_k}}$ est facteur direct de $S^{2^{h_k}} \circ \dots \circ S^{2^{h_1}}$.*

Théorème 7 *Soit $h > 0$. La cohomologie de $S^{2^h} \circ S^2$ est donnée par la formule :*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{F}}(Id, S^{2^h} \circ S^2) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{si } i \equiv 0, \cdots, 2^{h+1}-2 \mod 2^{h+2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus exactement, en tant que Ext-module :

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(Id, S^{2^h} \circ S^2) = \bigoplus_{i=0}^{2^{h+1}-2} \Sigma^i \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(Id, S^{2^{h+1}}).$$

On obtient le même résultat pour la cohomologie de $S^2 \circ S^{2^h}$.

Le complexe $\mathcal{I}^\bullet$

On défini le complexe $\mathcal{I}^\bullet$ comme la cobar-résolution :

$$0 \longrightarrow \overline{I} \xrightarrow{\delta_1=\delta} \overline{I} \otimes \overline{I} \xrightarrow{\delta_2} \cdots \xrightarrow{\delta_i} \overline{I}^{\otimes i+1} \xrightarrow{\delta_{i+1}} \cdots,$$

où :

$$\delta_i = \sum_{k=1}^{i} id^{\otimes k-1} \otimes \delta \otimes id^{\otimes i-k},$$

δ étant la comultiplication sur $\overline{I}$.

Sa cohomologie est donnée par :

$$H^n(\mathcal{I}^\bullet) = S^n.$$

Les complexes $\mathcal{S}_n^\bullet$

On définit le complexe $\mathcal{S}^\bullet$ par :

$$\mathcal{S}^\bullet \,:\, 0 \longrightarrow \overline{S^*} \xrightarrow{\delta_1^{\mathcal{S}}} \overline{S^*}^{\otimes 2} \xrightarrow{\delta_2^{\mathcal{S}}} \cdots \longrightarrow \overline{S^*}^{\otimes k} \longrightarrow \cdots,$$

où $\delta_k^{\mathcal{S}} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} Id \otimes \cdots \otimes \delta^{\mathcal{S}} \otimes \cdots \otimes Id$, où, dans chaque terme de la somme, la comultiplication $\delta^{\mathcal{S}}$ est placé en position i.

En considérant ce complexe degré par degré, on obtient des complexes :

$$\mathcal{S}_n^\bullet \,:\, 0 \longrightarrow S^n \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i>0,\ j>0}} S^i \otimes S^j \longrightarrow \cdots \longrightarrow (S^1)^{\otimes n} \longrightarrow 0.$$

Cohomologie des complexes $\mathcal{S}_n^\bullet$

Théorème 8 *La cohomologie des complexes $\mathcal{S}_k^\bullet$ est donnée par :*

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{S}_k^\bullet) = \bigoplus_{\substack{\sum_{\ell \geqslant 0} i_\ell = n \\ \sum_{\ell \geqslant 0} i_\ell 2^\ell = k}} \bigotimes_{\ell \geqslant 0} S^{i_\ell}(\Phi^\ell -).$$

En particulier,

$$\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(Id, \mathrm{H}^n(\mathcal{S}_{2^h}^\bullet)) = \begin{cases} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(Id, S^n) \text{ si } n = 2^k,\ k \leqslant h, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cohomologie de $I \circ S^2$ et de $S^2 \circ I$

Théorème 9 *Pour tout $n \geqslant 0$:*

$$\dim\,(\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{F}}(Id, S^2 \circ I)) = \dim\,(\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{F}}(Id, I \circ S^2)) = 1.$$

On obtient lorsqu'on remplace S^2 par Λ^2 (resp. Γ^2), la même chose mais décalé d'un degré (resp. de deux).

La suite $d(m, h, k)$.

On pose $\delta(m, h) = 1$ si m est congru à $0, \dots, 2^h - 1$ modulo 2^{h+1}, et $\delta(m, h) = 0$ sinon.

Soit $d(m, h, k)$ la suite définie par la récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
d(m,0,k) &= 1 \text{ si } m \equiv 0 \mod 2^{k+1} \\
d(m,0,k) &= 0 \text{ dans les autres cas} \\
a_0(m,0,k) &= d_{m,0,k} \\
a_0(m,h,k) &= 0 \text{ si } h > 0 \\
a_{h'}(m,h,k) &= \delta(m, h+k) \cdot a_{h'-1}(m,h,k) \text{ si } h \neq h' \\
a_{h'}(m,h',k) &= d(m,h',k) - \sum_{0 \leqslant \ell < h'} a_{h'-1}(m + 2^{h'} - 2^\ell + 1, \ell, k) \\
&\quad - a_{h'}(m + 2^{h'} - 2^\ell + 1, \ell, k) \\
d(m,h,k) &= \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant h} a_h(m - 2^\ell + 1, \ell, k).
\end{aligned}$$

Conjecture pour la cohomologie de $S^{2^h} \circ S^{2^k}$.

Conjecture 1 *L'entier $d(m, h, k)$ est égal à la dimension du $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^m_{\mathcal{F}}(Id, S^{2^h} \circ S^{2^k})$.*

Conjecture 2 *L'action de e_{h+k} sur $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(Id, S^{2^h} \circ S^{2^k})$ est nulle.*

Théorème 10 *La conjecture **??** implique la conjecture **??**.*

LE CAS DE $S^4 \circ S^4$

Théorème 11 *La première période des dimensions de* $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{F}}(Id, S^4 \circ S^4)$ *est donnée par :*

$$1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.$$

La conjecture **??** *est donc vérifiée dans ce cas.*