

Théorème 4 *L'algèbre (pour le produit de Yoneda) $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, Id)$ est engendré par des classes $e_i \in \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{2^i}(Id, Id)$, $i \geq 1$, soumises aux relations de commutativité, et aux relations : $e_i^2 = 0$.*

Le module (sur l'algèbre $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^(Id, Id)$ pour le produit de Yoneda) $\text{Ext}^*(Id, S^{2^n})$ est le quotient de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, Id)$ par l'idéal engendré par les classes $e_1, \dots, e_n$.*

Théorème 7 *Soit F et G deux foncteurs de $\mathcal{P}_{2^h}$ et $\mathcal{P}_{2^k}$ respectivement, tels que $e_1, \dots, e_h$ (resp. $e_1, \dots, e_k$) agissent trivialement sur $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, F)$ (resp $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, G)$). Alors :*

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^{<2^{h+k+1}}(Id, G \circ F) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{<2^{h+1}}(Id, F) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{<2^{k+1}}(Id, G) \otimes \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{<2^{h+k+1}}(Id, S^{2^k} \circ S^{2^h}) \quad (1)$$

Les autres degrés sont déduits de la périodicité de $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^(Id, G \circ F)$, la structure de module étant celle d'une somme directe de modules $\text{Ext}^*(Id, S^{2^k} \circ S^{2^h})$.*

RÉSOLUTIONS DANS $\mathcal{F}$ ET $\mathcal{P}$

Proposition 1 *La catégorie $\mathcal{F}$ a suffisamment d'injectifs.*

Proposition 2 *La catégorie $\mathcal{P}$ a suffisamment d'injectifs. Un système de générateurs injectifs est donné par $S^{i_1} \otimes \dots \otimes S^{i_k}$, $k \geq 1$. Les $S^{i_1} \otimes \dots \otimes S^{i_k}$ tels que $i_1 + \dots + i_k = n$ forment un système de générateurs injectifs de $\mathcal{P}_n$.*

Corollaire 3 *Par oubli de la structure polynomiale, tout objet F de $\mathcal{F}_n$ admet une résolution*

$$F \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots,$$

où I_j est une somme directe de termes $S^{i_1} \otimes \dots \otimes S^{i_k}$, $k \geq 1$, $i_1 + \dots + i_k = n$. Une telle résolution sera appelée S-résolution (homogène) de F .

La suite $d(m, h, k) = \dim (\text{Ext}_{\mathcal{F}}^m(Id, S^{2^h} \circ S^{2^k}))$ est donnée par :

$$\begin{aligned} d(m, 0, k) &= 1 \text{ si } m \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}, \\ d(m, 0, k) &= 0 \text{ dans les autres cas,} \\ a_0(m, 0, k) &= d_{m, 0, k}, \\ a_0(m, h, k) &= 0 \text{ si } h > 0, \\ a_{h'}(m, h, k) &= \delta(m, h+k) \cdot a_{h'-1}(m, h, k) \text{ si } h \neq h', \\ a_{h'}(m, h', k) &= d(m, h', k) - \sum_{0 \leq \ell < h'} a_{h'-1}(m+2^{h'}-2^\ell+1, \ell, k) \\ &\quad - a_{h'}(m+2^{h'}-2^\ell+1, \ell, k), \\ d(m, h, k) &= \sum_{0 \leq \ell \leq h} a_h(m-2^\ell+1, \ell, k). \end{aligned}$$

DÉFINITIONS - NOTATIONS

- $\mathcal{E}$: catégorie des $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels
- $\mathcal{E}^f$: catégorie des $\mathbb{F}_2$ -espaces vectoriels finis
- $\mathcal{F}$: catégorie des foncteurs $\mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}$
- $\overline{\mathcal{F}}$: $F \in \mathcal{F}$ tq $F(0) = 0$
- $\mathcal{F}^f$: $F \in \mathcal{F}$ tq $F(V) \in \mathcal{E}^f$
- $\overline{\mathcal{F}}^f$: intersection de $\overline{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{F}^f$
- $\mathcal{P}$: catégorie des foncteurs polynomiaux stricts $\mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}$
- $\mathcal{P}_n$: foncteurs polynomiaux stricts homogènes de degré n
- $\mathcal{F}_n$: image de $\mathcal{P}_n$ par le foncteur oubli $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$;
c'est une sous-catégorie pleine de $\overline{\mathcal{F}}$

COHOMOLOGIE DE $S^{2^h} \circ S^{2^k}$

Théorème 6 *Soit $\delta(m, h)$ la suite égale à 1 si m est congru à $0, \dots, 2^h - 1$ modulo 2^{h+1} , et nulle sinon.*

SUR LES MODULES D'EXTENSIONS DE FONCTEURS COMPOSÉS

Alain Troesch

20 novembre 2000

PÉRIODICITÉ DE LA COHOMOLOGIE ; COMPARAISON

Théorème 5 *Soit $F \in \mathcal{P}_n$. On note aussi F son image dans $\mathcal{F}_n$. Alors :*

1. si n n'est pas une puissance de 2, $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, F) = 0$.
2. si $n = 2^h$, $\dim (\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, F))$ est 2^{h+1} -périodique, et

$$\text{Ext}_{\mathcal{P}}^*(I^{(h)}, F) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^{<2^{h+1}}(Id, F).$$

STABILITÉ PAR COMPOSITION DE LA NULLITÉ.

Proposition 12 Soit P un foncteur polynomial de $\overline{\mathcal{F}}$, et F dans $\overline{\mathcal{F}}^f$. Si $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, F) = 0$, alors $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, P(F)) = 0$.

12

Théorème 15 Soit $F \in \overline{\mathcal{F}}_n$, $I^\bullet$ une S -résolution de F , et $f \in \text{Ext}_{\mathcal{F}}^k(Id, F)$, $k < 2^{n+1}$ une classe représentée par une inclusion directe $S^{2^n} \longrightarrow I^k$. Soit $e(i)$ le seul élément non nul s'il existe (et nul sinon) de $\text{Ext}^i(Id, Id)$. Alors l'action de $e(i)$, $i \leq n$ sur f est nulle (ie $f \cdot e(i) = 0$) si et seulement si les différentielles de rang i issues des termes de la k -ième colonne de $\mathbf{I}_1(Id, I^\bullet \circ S^{2^m})$ ($m > 1$) correspondant à la cohomologie $\text{Ext}^*(Id, S^{2^n} \circ S^{2^m})$ du facteur direct $S^{2^n} \circ S^{2^m} \longrightarrow I^k \circ S^{2^m}$ sont toutes nulles.

16

UNE PROPRIÉTÉ D'INDUCTION DANS $\overline{\mathcal{F}}$.

Proposition 11 Soit (P) une propriété sur les objets de $\overline{\mathcal{F}}$ telle que :

1. le produit tensoriel de deux objets quelconques de $\overline{\mathcal{F}}$ vérifie la propriété (P) ;
2. les foncteurs Λ^n vérifient la propriété (P) pour tout $n \geq 1$;
3. soit $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ une suite exacte dans $\overline{\mathcal{F}}$; si deux foncteurs parmi F , F' et F'' vérifient (P) , il en est de même du troisième ;

Alors, tout foncteur polynomial de $\overline{\mathcal{F}}$ vérifie la propriété (P) .

11

COHOMOLOGIE DE $(S^2)^{\circ h} \circ I$

Théorème 14 Soit $E(m, h)$ l'entier défini par :

$$E(m, h) = \dim (\text{Ext}_{\mathcal{F}}^m(Id, (S^2)^{\circ h} \circ I)).$$

La suite $(E(m, h))_{m \in \mathbb{Z}, h \in \mathbb{N}}$ vérifie la récurrence :

$$(R) : E(m, h) = E(m-1, h) + E(m, h-1) \text{ si } m \geq 0, \text{ et } h \geq 1,$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} (1) : E(0, 0) = 1, \\ (2) : E(m, 0) = 0 \text{ si } m \geq 1, \\ (3) : E(m, h) = 0 \text{ si } m < 0, \text{ et } h \geq 0, \end{cases}$$

Explicitement :

$$\dim (\text{Ext}_{\mathcal{F}}^m(Id, (S^2)^{\circ h} \circ I)) = \binom{m+h-1}{m}$$

15

INEXACTITUDE DE LA COMPOSITION

Théorème 9 Soit P un foncteur polynomial dans $\overline{\mathcal{F}}$, et soit $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ une suite exacte dans $\overline{\mathcal{F}}^f$. On note H l'homologie en $P \circ F$ de :

$$0 \longrightarrow P \circ F' \longrightarrow P \circ F \longrightarrow P \circ F'' \longrightarrow 0.$$

Alors $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, H) = 0$.

Autrement dit, la composition est «exacte modulo $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, -)$ ». En considérant une décomposition en suites exactes courtes d'un complexe $C^\bullet$, on en déduit :

Corollaire 10 Soit P un foncteur polynomial dans $\overline{\mathcal{F}}$, et $(C^\bullet, d^\bullet)$ un complexe d'objets de $\overline{\mathcal{F}}^f$. Alors, pour tout $n \geq 0$:

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, H_n(P(C^\bullet))) = \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, P(H_n(C^\bullet))).$$

10

COHOMOLOGIE DES COMPLEXES $\mathcal{S}_n^\bullet$

Théorème 13 La cohomologie des complexes $\mathcal{S}_k^\bullet$ est donnée par :

$$H^n(\mathcal{S}_k^\bullet) = \bigoplus_{\sum_{i \geq 0} i_i = n} \bigotimes_{i \geq 0} S^{i_i}(\Phi^i -).$$

En particulier,

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, H^n(\mathcal{S}_{2^k}^\bullet)) = \begin{cases} \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, S^n) & \text{si } n = 2^k, \ k \leq h, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

14

LEMME CLÉ 1 : THÉORÈME D'ANNULATION DE PIRASHVILI

Théorème 8 (Pirashvili) Soit G et H deux foncteurs de $\overline{\mathcal{F}}$. Alors :

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, G \otimes H) = 0.$$

Plus généralement, si F est un bifoncteur $(\mathcal{E}^f)^2 \rightarrow \mathcal{E}$ tel que :

$$F(V_1, 0) = 0 = F(0, V_2), \quad \forall V_1, V_2 \in \mathcal{E}^f$$

et si Δ est la diagonale $\mathcal{E}^f \rightarrow (\mathcal{E}^f)^2$, alors :

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, F \circ \Delta) = 0$$

En particulier, pour tout G et H dans $\overline{\mathcal{F}}^f$, et tout foncteur $F \in \mathcal{F}$,

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(Id, F \circ (G \otimes H)) = 0.$$

9

LES COMPLEXES $\mathcal{S}_n^\bullet$

Le complexe $\mathcal{S}^\bullet$ est la résolution Cobar de S^* :

$$\mathcal{S}^\bullet : 0 \longrightarrow \overline{S^*} \longrightarrow \overline{S^*}^{\otimes 2} \longrightarrow \dots \longrightarrow \overline{S^*}^{\otimes k} \longrightarrow \dots$$

En considérant ce complexe degré par degré, on obtient des complexes :

$$\mathcal{S}_n^\bullet : 0 \longrightarrow S^n \longrightarrow \bigoplus_{\substack{i+j=n \\ i>0, j>0}} S^i \otimes S^j \longrightarrow \dots \longrightarrow (S^1)^{\otimes n} \longrightarrow 0.$$

13