Université Paris 6 — Novembre 2003
DEUG MIAS 12 - 2003/04

Correction du devoir à la maison n^o 1

Exercice 1 –

1. (a) $10 \equiv 1 \mod 9$, donc $10^k \equiv 1^k \mod 9$, c'est-à-dire $10^k \equiv 1 \mod 9$.

   (b) Soit $a_0, \dots, a_k$ les chiffres de n (en partant de la droite). Alors
$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{k} a_i \mod 9,$$
   puisque d'après la question 1a, $a_i 10^i \equiv a_i \mod 9$. Or, $\sum_{i=0}^{n} a_i = \sigma_n$, donc $n \equiv \sigma_n \mod 9$.

2. (a) $A = 5555^{5555} < (10^4)^{5555} = 10^{22220}$. Donc A a au plus 22220 chiffres et ces chiffres sont majorés par 9, Par conséquent, $B = \sigma_A \leqslant 9 \cdot 22220 = 199980$. Ainsi, B a au plus 6 chiffres $a_0, \dots, a_5$:
$$B = \sum_{i=0}^{5} a_i 10^i.$$
   De plus, $a_0, \dots, a_4$ sont majorés par 9, et a_5 est majoré par 1. Donc $\sigma_B \leqslant 9 \cdot 5 + 1 = 46$. Pour obtenir l'égalité dans cette expression, il faudrait que chaque chiffre soit égal à son majorant, c'est-à-dire $B = 199999$, ce qui n'est pas possible. Ainsi, l'inégalité est stricte : $B < 46$.

   (b) D'après la question 1b, $5555 \equiv \sigma_{5555} \equiv 20 \equiv 2 \mod 9$. En élevant cette congruence à la puissance 5555, on obtient :
$$A = 5555^{5555} \equiv 2^{5555} \mod 9.$$

   (c) On commence par montrer que $2^6 \equiv 1 \mod 9$. En effet, $2^6 = 64 = 9 \cdot 7 + 1$ (on peut aussi utiliser la question 1b deux fois de suite). Alors
$$2^{5555} = 2^{925 \cdot 6 + 5} = (2^6)^{925} \cdot 2^5 \equiv 1^{925} \cdot 2^5 \mod 9.$$
   Par conséquent, $2^{5555} \equiv 2^5 \mod 9$. Or $2^5 = 32 \equiv 5 \mod 9$. En conclusion $2^{5555} \equiv 5 \mod 9$. Comme $0 \leqslant 5 < 9$, on en déduit que 5 est le reste de la division de 2^{5555} par 9.

   (d) D'après les questions 2b et 2c, $A \equiv 5 \mod 9$. Par conséquent, d'après la question 1b appliquée successivement à A et $\sigma_A = B$, B et $\sigma_B = C$, et C et $\sigma_C = D$, on obtient $D \equiv 5 \mod 9$. De plus $C < 46$ (question 2a) donc il est composé de deux chiffres au plus ; son chiffre des unités est toujours majoré par 9, et son chiffre des dizaines est majoré par 4. Par conséquent, $D = \sigma_c \leqslant 4 + 9 = 13$. Le seul entier D vérifiant $0 \leqslant D \leqslant 13$ et $D \equiv 5 \mod 9$ est $D = 5$.

   Attention à l'erreur consistant à dire que $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, et donc $\sigma_C \leqslant \sigma_{46} = 10$. La suite (σ_n) n'est en effet pas croissante. Par exemple $\sigma_9 > \sigma_{10}$, ou $\sigma_{39} > \sigma_{46}$.

Exercice 2 –

1. On note $Q(n)$ la propriété $P(2^n)$. On montre $Q(n)$ par récurrence sur l'entier n.

   Pour $n = 0$, $Q(0) = P(1)$ est la propriété : $\forall a_1 \geqslant 0$, $a_1 \geqslant a_1$, ce qui est trivialement vrai. Cela initialise la récurrence.

   On montre également à part la propriété $Q(1)$ dont on aura besoin pour montrer la transmission $Q(n) \Longrightarrow Q(n+1)$. $Q(1) = P(2)$ est la propriété suivante :
$$\forall (a_1, a_2) \in [0, +\infty[^2, \ \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \geqslant \sqrt{a_1 \cdot a_2}.$$

Cette propriété est vraie, car $\dfrac{1}{2}(a_1+a_2)-\sqrt{a_1\cdot a_2}=\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2\geqslant 0$.

On suppose maintenant que $Q(n)$ est vraie pour un certain entier $n\geqslant 1$. Soit $a_1,\dots,a_{2^{n+1}}$ des réels positifs. Alors,

$$\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{2^{n+1}}a_i=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n}a_i+\frac{1}{2^n}\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}}a_i\right).$$

Chacune de ces deux sommes contient 2^n termes, et on peut donc leur appliquer l'hypothèse de récurrence $P(2^n)$:

$$\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{2^{n+1}}a_i\geqslant\frac{1}{2}\left(\left(\prod_{i=1}^{2^n}a_i\right)^{\frac{1}{2^n}}+\left(\prod_{i=2^n+1}^{2^{n+1}}a_i\right)^{\frac{1}{2^n}}\right).$$

En appliquant $P(2)=Q(1)$ avec $a_1'=\left(\prod_{i=1}^{2^n}a_i\right)^{\frac{1}{2^n}}$ et $a_2'=\left(\prod_{i=2^n+1}^{2^{n+1}}a_i\right)^{\frac{1}{2^n}}$, on obtient :

$$\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{2^{n+1}}a_i\geqslant\left(\left(\prod_{i=1}^{2^n}a_i\right)^{\frac{1}{2^n}}\cdot\left(\prod_{i=2^n+1}^{2^{n+1}}a_i\right)^{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\prod_{i=1}^{2^{n+1}}a_i\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}},$$

ce qui est la propriété $Q(n+1)$. D'après le principe de récurrence, on a donc montré que pour tout $n\geqslant 0$, $Q(n)$ est vraie, donc $P(2^n)$ est vraie.

2. Soit $n\geqslant 2$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Soit $a_1,\dots,a_{n-1}$ des réels positifs, et soit $g=\left(\prod_{i=1}^{n-1}a_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

   En appliquant $P(n)$ pour le n-uplet $(a_1,\dots,a_{n-1},g)$, on obtient :

$$\frac{1}{n}\left(g+\sum_{i=1}^{n-1}a_i\right)\geqslant\left(g\cdot\prod_{i=1}^{n-1}a_i\right)^{\frac{1}{n}}=\left(g\cdot g^{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}=g.$$

   Par conséquent, $g+\sum_{i=1}^{n-1}a_i\geqslant ng$. On en déduit que $\dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}a_i\right)\geqslant g$, ce qui est la propriété $P(n-1)$ pour le $(n-1)$-uplet $(a_1,\dots,a_{n-1})$. Par conséquent, la propriété $P(n-1)$ est vraie pour tout $(n-1)$-uplet $(a_1,\dots,a_{n-1})$: la propriété $P(n-1)$ est vraie. On a donc montré que pour tout $n\geqslant 2$, $P(n)\Longrightarrow P(n-1)$.

3. Soit n un entier strictement positif. Alors $P(n)$ est vraie. En effet, il existe k tel que $2^k\geqslant n$. Alors, d'après la question 2,

$$P(2^k)\Longrightarrow P(2^k-1)\Longrightarrow\cdots\Longrightarrow P(n+1)\Longrightarrow P(n).$$

   Or, d'après la question 1, $P(2^k)$ est vraie, donc aussi $P(n)$. Autrement dit, on fait une récurrence descendante (de pas -1), de $n=2^k$ à $n=1$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Exercice 3 –

1. Soit $\varepsilon>0$. On va montrer qu'il existe un entier N_ε'' tel que pour tout $n>N_\varepsilon''$, $|v_n|<\varepsilon$. Dans ce cas, par définition, v_n converge alors vers 0.

   Puisque u_n converge vers 0, il existe N_ε tel que pour tout $n>N_\varepsilon$, $|u_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. Alors, pour tout $n>N_\varepsilon$,

$$\left|\frac{u_{N_\varepsilon+1}+\cdots+u_n}{n}\right|\leqslant\frac{|u_{N_\varepsilon+1}|+\cdots+|u_n|}{n}<\frac{n-N_\varepsilon}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

   D'autre part N_ε étant fixé, $u_1+\cdots+u_{N_\varepsilon}$ est un réel fixé (ne dépendant pas de n). Donc lorsque n tend vers $+\infty$, la suite $\frac{1}{n}(u_1+\cdots+u_{N_\varepsilon})$ tend vers 0. Ainsi, il existe un entier N_ε' tel que pour tout $n\geqslant N_\varepsilon'$, $\left|\frac{1}{n}(u_1+\cdots+u_{N_\varepsilon})\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. Soit $N_\varepsilon''=\max(N_\varepsilon,N_\varepsilon')$. Alors, pour tout $n>N_\varepsilon''$,

$$|v_n|=\left|\frac{1}{n}(u_1+\cdots+u_n)\right|\leqslant\left|\frac{1}{n}(u_1+\cdots+u_{N_\varepsilon})\right|+\left|\frac{1}{n}(u_{N_\varepsilon+1}+\cdots+u_n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Donc v_n converge vers 0.

2. On applique la question 1 à la suite $u_n - \ell$ qui converge vers 0. Par conséquent, la suite $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)$ converge vers ℓ. Or

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1} n(u_k - \ell) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \ell = v_n - \ell.$$

Donc $v_n - \ell$ converge vers 0, c'est-à-dire v_n converge vers ℓ.

3. Soit $A > 0$. Il existe N_1 tel que pour tout $n > N_1$, $u_n > 3A$. Alors, pour tout $n \geqslant N_1$, $\frac{1}{n}(u_{N_1+1} + \cdots + u_n) > 3A \cdot \frac{n-N_1}{n}$. Or la suite $\left(3A \cdot \frac{n-N_1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $3A$, donc il existe N_2 tel que pour tout $n \geqslant N_2$, $3A \cdot \frac{n-N_1}{n} > 2A$ (provient de la définition de la convergence avec $\varepsilon = A$). Par conséquent,

$$\forall n > \max(N_1, N_2),\ \frac{1}{n}(u_{N_1+1} + \cdots + u_n) > 2A.$$

De plus, $\frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_{N_1})$ converge vers 0. Il existe donc un entier N_3 tel que pour tout $n > N_3$, $\frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_{N_1}) > -A$. Alors

$$\forall n > \max(N_1, N_2, N_3),\ v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_{N_1}) + \frac{1}{n}(u_{N_1+1} + \cdots + u_n) > -A + 2A = A$$

Ainsi v_n converge vers $+\infty$.

4. On applique la question 2 à la suite $u'_n = u_{n+1} - u_n$. Alors

$$\frac{1}{n}(u'_1 + \cdots + u'_n) = \frac{1}{n}(u_{n+1} - u_1) = \frac{u_{n+1}}{n} - \frac{u_1}{n},$$

et cette suite tend vers ℓ. Puisque $\frac{u_1}{n}$ tend vers 0, on en déduit que $\frac{u_{n+1}}{n}$ tend vers ℓ, puis que $\frac{u_{n+1}}{n+1}$ aussi (car $\frac{n}{n+1}$ tend vers 1), et par conséquent que $\frac{u_n}{n}$ tend vers ℓ

5. Même raisonnement en utilisant la question 3 avec la suite $u'_n = u_{n+1} - u_n$.

6. On applique la question 4 à la suite $u'_n = \ln u_n$. Alors $u'_{n+1} - u'_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers $\ln \ell$, donc $\frac{u'_n}{n} = \frac{1}{n}\ln u_n$ converge vers $\ln \ell$, donc $u_n^{1/n}$ converge vers ℓ.

7. Soit $v_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Alors $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \sim \frac{4n^2}{n^2} \sim 4$. Donc $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ converge vers 4, donc $v_n^{1/n} = u_n$ converge aussi vers 4, d'après la question 6.

Exercice 4 –

1. (a) On montre que $S_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$ par récurrence sur n. L'initialisation se fait pour $n = 1$: $S_1 = 1 \leqslant \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1$.

   On suppose que l'inégalité est vraie pour n. On la montre pour $n+1$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \sqrt{n} + \frac{\sqrt{n^2-1}+1}{\sqrt{n+1}} \\ &\leqslant \sqrt{n} + \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

   Ainsi $S_{n+1} \leqslant \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. Par le principe de récurrence, l'inégalité est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) On montre de la même manière par récurrence sur n que pour tout $n > 0$, $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n$. Pour $n = 1$, $2\sqrt{2} - 2 \leqslant 1$, car $0 \leqslant 2\sqrt{2} \leqslant 3$, puisque $8 \leqslant 9$ (en élevant au carré).

   On suppose que l'inégalité est vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{(2n+3)^2}}{\sqrt{n+1}} - 2 &= \frac{\sqrt{4n^2+12n+9}}{\sqrt{n+1}} - 2 \\ \geqslant \frac{\sqrt{4n^2+12n+8}}{\sqrt{n+1}} - 2 = \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\sqrt{n+1}} - 2 &= \frac{n+2}{\sqrt{n+2}} - 2 = \sqrt{n+2} - 2. \end{aligned}$$

   Ainsi, l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. D'après la question 1, on peut encadrer u_n :

$$2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Or, la limite de $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$ lorsque n tend vers l'infini est 1, et la limite de $\frac{2}{\sqrt{n}}$ est 0. Donc, d'après le théorème de limite d'une somme et d'un produit, la limite de $2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$ est 2. De même, la limite de $1+\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$ est 2. Ainsi, u_n est encadré par deux suites ayant la même limite. Par conséquent, d'après le théorème d'encadrement, u_n converge, et sa limite vaut 2.
De plus,

$$2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} - 2 \leqslant u_n - 2 \leqslant 1 + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} - 2 \leqslant 0.$$

Donc

$$|u_n - 2| \leqslant 2 + \frac{2}{\sqrt{n}} - 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

3. D'après la question 2, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge vers 2, donc $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

4. (a) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{2\sqrt{n+1}} = 0$. Donc v_n est décroissante. D'après la question 1b, $v_n \geqslant -2 + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \geqslant -2$. Donc v_n converge.

   (b) D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}|v_{n+1} - v_n| &= \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant \frac{2\sqrt{n+1} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\ &\leqslant \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leqslant \frac{1}{4n\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

   Donc $0 \leqslant w_{2n} - w_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{4k\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{4n\sqrt{n}} = \frac{1}{4\sqrt{n}}$. Par conséquent, pour tout $k \geqslant 0$,

$$w_{2^{k+1}n} - w_{2^k n} \leqslant \frac{1}{4\sqrt{2^k n}} = \frac{1}{2^{k+1}\sqrt{n}}.$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned}|v_{2^{k+1}n+1} - v_{n+1}| &= \left|\sum_{i=n+1}^{2^{k+1}n} (v_{i+1} - v_i)\right| \\ &\leqslant \sum_{i=n+1}^{2^{k+1}n} |v_{i+1} - v_i| = w_{2^{k+1}n} - w_n = \sum_{i=0}^{k} (w_{2^{i+1}n} - w_{2^i n}) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^{i+1}\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

   Ainsi, $|v_{2^{k+1}n+1} - v_{n+1}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. En faisant tendre k vers $+\infty$ dans cette inégalité, on obtient

$$|\ell - v_{n+1}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$

   où ℓ est la limite de v_n, et donc $|v_n - \ell| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.