Université Paris 6 Octobre 2003
U.F.R. de mathématiques – 920
DEUG MIAS 12 - 2003/04 – 1er semestre
Analyse – Groupes 5/6

Devoir 1 – Généralités sur les nombres réels

À rendre le mardi 7 octobre 2003

Exercice 1 – Inégalités de Schwarz et de Minkovski.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i x)^2.$$
Montrer que f est un polynôme de degré inférieur à 2. Dans quel cas son degré est-il *strictement* inférieur à 2 ?
2. Déterminer le signe de f, puis de son discriminant.
3. En déduire l'inégalité de Schwarz :
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$
4. Déduire de l'inégalité de Schwartz l'inégalité de Minkovski :
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Exercice 2 – Parties entières.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\,\mathrm{E}(nx)\right) = \mathrm{E}(x)$.
2. Trouver un réel $y \in \mathbb{R}_+^*$ et un réel $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{E}\left(\frac{1}{y}\,\mathrm{E}(yx)\right) \neq \mathrm{E}(x)$.

Exercice 3 – Bornes supérieures.
Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que $E = \{|x - y|, x, y \in A\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$, et que : $\sup(E) = \sup(A) - \inf(A)$.