Devoir 2 – Convergence de suites

À rendre le mardi 14 octobre 2003

Problème Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, et soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = E(u_n)$.

1. Montrer que (u_n) converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si et seulement si v_n converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (u_n) pour que (v_n) converge dans $\mathbb{R}$.
3. On suppose que (v_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Est-ce que (u_n) converge forcément? Si non, trouver un contre-exemple.
4. On suppose que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Montrer que (v_n) converge. Quelle est sa limite?
5. On suppose que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{Z}$.
 - (a) Exemple 1 : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers des limites entières, et que $\lim v_n = E(\lim u_n) = \lim u_n$,
 - (b) Exemple 2 : $u_n = 1 - \frac{1}{n}$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers des limites entières, et que $\lim v_n = E(\lim u_n) - 1 = \lim u_n - 1$
 - (c) Exemple 3 : $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Montrer que (u_n) converge vers une limite entière, mais que (v_n) ne converge pas.
 - (d) Montrer que v_n converge vers $E(\ell) = \ell$ si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n < \ell\}$ est fini.
 - (e) Montrer que v_n converge vers $E(\ell) - 1$ si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \geq \ell\}$ est fini.
 - (f) Montrer que v_n diverge si et seulement si les deux ensembles $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n < \ell\}$ et $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \geq \ell\}$ sont infinis.