Université Paris 6 — Octobre 2003
U.F.R. de mathématiques – 920
DEUG MIAS 12 - 2003/04 – 1er semestre
Analyse – Groupes 5/6

TD 3 – Vitesse de convergence

Exercice 1 – Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{\mathrm{E}(nx)}{n}$ converge. Quelle est sa limite? Montrer que la convergence est en $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2 – Soit $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Montrer que $u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 3 – Soit $a \in]1, +\infty[$, et soit $S_n = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \cdots + \frac{1}{n^a}$.

1. Montrer que S^n est croissante.
2. Soit $v_n = S_{2^n}$. Montrer que $v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^{n(a-1)}}$. En déduire que v_n converge, puis que S_n converge. Soit ℓ la limite de S^n.
3. Montrer que la convergence est en $O\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right)$, c'est-à-dire: $|S_n - \ell| = O\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right)$.

Exercice 4 – Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et soit $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}$.

1. On rappelle que pour tout $x \geqslant 1$, $\frac{x-1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}.$$
2. Montrer que u_n est convergente. Déterminer sa limite et estimer la vitesse de convergence.

Exercice 5 – Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, et $u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$, et $v_n = S_n - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que pour tout $n > 0$, $S_n \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$.
2. Montrer que pour tout $n > 0$, $2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant S_n$.
3. En déduire que u_n et v_n convergent. Déterminer leurs limites, et montrer que les deux convergences sont en $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
4. En déduire un équivalent simple de S_n en $+\infty$.

Exercice 6 – Déterminer un équivalent simple de la suite (u_n) dans les cas suivants:

$$a)\ u_n = \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right),\ a \in \mathbb{R}^*; \qquad b)\ u_n = \left(1 + \sqrt{n^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad c)\ u_n = \ln(n^2 + n + 1)$$

Exercice 7 – Soit d et d' deux entiers positifs, et soit P et Q deux polynômes de degrés d et d' respectivement. On écrit $P = a_d X^d + \cdots + a_0$, et $Q = b_d X^d + \cdots + b_0$. Déterminer un équivalent simple de la suite $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$. Étudier la convergence de u_n.

Exercice 8 – Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer un équivalent simple de $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$. On discutera selon les valeurs de a et b.

Exercice 9 – Déterminer, si elles existent, les limites des suites u_n ci-dessous:

$$a)\ u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n,\ a \in \mathbb{R}^*; \qquad b)\ u_n = \left(\frac{n}{n-a}\right)^n,\ a \in \mathbb{R} - \mathbb{N};$$

$$c)\ u_n = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n,\ a, b \in \mathbb{R}_+, a \neq b; \qquad d)\ u_n = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n.$$

Exercice 10 – Soit $a \in \mathbb{R}^*$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $u_n = \left(1 + \frac{a}{n^\alpha}\right)^{n^\beta}$. Déterminer la limite de u_n.

Exercice 11 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = a > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1 + u_n^2}}$.

1. Montrer que u_n converge.
2. Soit, pour $n > 0$, $w_n = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_{n-1}^2}$. Calculer w_n.
3. En calculant $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$ de deux manières différentes, déterminer la limite de nu_n^2, et en déduire un équivalent simple de u_n.

Exercice 12 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.
2. Étudier le sens de variation de (u_n).
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a les deux encadrements suivants:
$$2 \leqslant u_n^2 - u_{n-1}^2 \leqslant 2 + u_n - u_{n-1} \qquad \text{puis} \qquad 2n \leqslant u_n^2 - 1 \leqslant 2n + u_n - 1.$$
4. Déterminer la limite de u_n.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{2n}{u_n^2} \leqslant 1 - \dfrac{1}{u_n^2}$.
6. En déduire un équivalent de u_n.