Université Paris 6 Novembre 2003
DEUG MIAS 12 - 2003/04 – 1er semestre
Analyse – Groupes 5/6

**TD 6 – Fonctions continues**

**Exercice 1** – Étudier la continuité des fonctions $f$ suivantes:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in ]-\infty, -1[, \\ -x-1 & \text{si } x \in [-1, 0[, \\ x+1 & \text{si } x \in [0, +\infty[; \end{cases} \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} a\sin x + \cos x & \text{si } x \in \left]-\infty, \frac{\pi}{2}\right[, \\ \pi - x & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[, \\ \frac{x^2}{2} + b & \text{si } x \in [\pi, +\infty[. \end{cases}$$

**Exercice 2** – Étudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes:

$a)\ f(x) = \mathrm{E}(x)\sin(\pi x)$; $\quad b)\ f(x) = \mathrm{E}(x)\sin x \quad c)\ f(x) = \mathrm{E}(x) + \sqrt{x - \mathrm{E}(x)}$.

**Exercice 3** – Étudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes:

1. $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;
2. $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;
3. $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1 - x$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;
4. $f(x) = \frac{1}{q}$, où $x = \frac{p}{q}$ avec $p$ et $q$ premiers entre eux, si $x \in \mathbb{Q}$, et $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

**Exercice 4** –

1. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinue en tout point de $\mathbb{R}$, et telle que $|f|$ soit continue sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un exemple d'application $f : [0, 1] \to [0, 1]$ bijective, et discontinue en tout point de $[0, 1]$.

**Exercice 5** – Déterminer toutes les applications $f$ dans chacun des cas suivants:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x)f(y)$.
4. $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue, et $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

**Exercice 6** – Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que si $f(x + 1) - f(x)$ tend vers $\ell$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$, alors $\frac{f(x)}{x}$ tend aussi vers $\ell$.

**Exercice 7** – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application surjective telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(y)$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. Montrer que $f$ admet des limites infinies en $+\infty$ et $-\infty$, de signe opposé.

**Exercice 8** – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.

1. Montrer que si $f$ n'est pas constante, alors $f$ n'admet pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que si $f$ est continue, alors $f$ est bornée.

**Exercice 9** – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que $f$ admet une borne inférieure, et que celle-ci est atteinte.

**Exercice 10** – Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application continue telle que $\forall x > 0,\ f(x) < x$.

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que pour tout $0 < a < b$, il existe $M < 1$ tel que $f(x) \leqslant Mx$ sur $[a, b]$.

**Exercice 11** – Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (x-a)^2(x-b)^2$. Déterminer l'image de $[a, b]$ par $f$.

**Exercice 12** – Soit $I$ un intervalle, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(I) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que $f$ est constante.

**Exercice 13** – Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 14** – Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$ (autrement dit, $f$ admet un point fixe).

**Exercice 15** – Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$, telles que $f(a) = g(b)$ et $f(b) = g(a)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = g(c)$.

**Exercice 16** – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f \circ f(a) = a$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

**Exercice 17** – Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{n})$.

**Exercice 18** – Soit, pour $n \geqslant 1$, $P_n(x) = x^{n+1} + x^n - 1$.

1. Montrer que $P_n$ admet une unique racine $x_n$ dans $\mathbb{R}^+$, et que $x_n \leqslant 1$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Déterminer sa limite.

**Exercice 19** – Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante telle que $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante.

1. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Montrer que si $f$ n'est pas identiquement nulle, alors $f$ ne s'annule pas.
3. Donner un exemple de telle fonction.

**Exercice 20** – Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que $f$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $\phi$ sa bijection réciproque. Montrer que $\phi(t) \sim t$ en $+\infty$.
3. Montrer qu'en $+\infty$, $\ln(\phi(t)) = \ln(t) + o(\ln t)$, et $\ln(\frac{\phi(t)}{t}) = -\frac{\ln t}{t} + o(\frac{\ln t}{t})$.
4. En déduire que $\phi(t) = t - \ln t + \frac{\ln t}{t} + o(\frac{\ln t}{t})$.

**Exercice 21** – Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Exercice 22** – Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ uniformément continue sur $[a, b[$. Montrer que $f$ peut être prolongée par continuité en $b$.