Université Paris 6 — Décembre 2003
DEUG MIAS 12 - 2003/04 – 1er semestre
Analyse – Groupes 5/6

TD 7 – Dérivation

Exercice 1 – Étudier la continuité, la dérivabilité, et le cas échéant la continuité de la dérivée, l'existance de la dérivée seconde et la continuité de la dérivée seconde au point 0 des fonctions suivantes:

$a)\ f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ $\quad b)\ f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$c)\ f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ $\quad d)\ f(x) = \begin{cases} x^\alpha\sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

$e)\ f(x) = \begin{cases} x^\alpha\ln(|x|^\beta) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ $\quad f)\ f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\ln(1-|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Exercice 2 – Montrer que les fonctions f suivantes sont C^∞ sur leur domaine de définition D_f, et calculer leurs dérivées successives.

$a)\ D_f = \mathbb{R},\ f(x) = x\ \mathrm{e}^{-x}$ $\quad b)\ D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{-a}{b}\right\},\ f(x) = \frac{1}{ax+b}$

$c)\ D_f = \mathbb{R} - \{1,-1\},\ f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ $\quad d)\ D_f = \mathbb{R},\ f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$

Exercice 3 – Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que f peut se prolonger par continuité en 0. On note encore f la fonction prolongée.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et calculer f'.
3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que
$$f(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$
4. Écrire la formule de Taylor-Young en 0 pour f. Était-ce prévisible?

Exercice 4 – Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ si $x < 0$, et $f(0) = 0$ si $x \geqslant 0$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et calculer f'.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que
$$\forall x \in]-\infty, 0[,\quad f(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$
3. Écrire la formule de Taylor-Young en 0 pour f. Était-ce prévisible?

Exercice 5 – Soit f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = (x-1)^n\ln x$. Montrer que f_n est C^∞, et montrer que
$$f_n^{(n)}(x) = (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x^k}$$

Exercice 6 – Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ admettant en $+\infty$ et en $-\infty$ la même limite ℓ. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c) = 0$

Exercice 7 – Soit f une fonction définie sur R^+, dérivable sur R_+^*, telle que f admette en $+\infty$ une limite égale à $f(0)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 8 – Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

1. Montrer que si f s'annule en n points distincts, f' s'annule en au moins $n-1$ points, et que si f s'annule en un infinité de points, alors f' aussi.
2. Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ admet un nombre fini de solutions
3. Quel est le nombre maximal de solutions réelles de l'équation $x^p - ax + b = 0$?

Exercice 9 – Soit P un polynôme de degré n.

1. Montrer que si P admet n racines réelles distinctes, P' admet $n-1$ racines réelles distinctes, séparant les racines de P.
2. Montrer que si P est scindé (toutes ses racines sont réelles), il en est de même de P'. Localiser les racines de P'.
3. Soit P un polynôme scindé. Montrer que $P^2 + 1$ n'admet pas de racine réelle, et que toutes ses racines complexes sont simples.

Exercice 10 – Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$, et $f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que la tangente à la courbe en c passe par l'origine.

Exercice 11 – Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$, et $f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que la tangente à la courbe en c passe par $(c-1, 0)$.

Exercice 12 – Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f admette une limite ℓ en $+\infty$.

1. Montrer que la suite $f(n+1) - f(n)$ tend vers 0
2. Montrer qu'il existe une suite c_n de limite $+\infty$ telle que $f'(c_n)$ tende vers 0.
3. On suppose que f vérifie $f^2 + (1+f')^2 \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est décroissante et bornée, puis que f est identiquement nulle.

Exercice 13 – Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$, telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x_1 < \cdots < x_n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f'(x_i) = n$, et $y_1 < \cdots < y_n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} = n$.

Exercice 14 – Soit f deux fois dérivable sur $[0,1]$, telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$.

1. Justifier l'existence de bornes supérieures M, M' et M'' de f, f' et f'', et l'existence d'un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $|f(\alpha)| = M$.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant M'' \cdot \min(x, |x-\alpha|)$.
3. En déduire que $f(\alpha) \leqslant M'' \cdot \min\left(\frac{\alpha^2}{4}, \frac{(1-\alpha)^2}{2}\right)$.
4. En déduire que $M \leqslant \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) \cdot M''$
5. Trouver une fonction pour laquelle l'inégalité précédente est une égalité.
6. On suppose de plus que $f'(1) = 0$. Montrer que $M \leqslant \frac{1}{16} \cdot M''$, et que cette inégalité est optimale.