Université Paris 6 Décembre 2003
DEUG MIAS 12 - 2003/04 – 1er semestre
Analyse – Groupes 5/6

TD 8 – Fonctions usuelles

Exercice 1 – Étude et graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \text{Arcsin} \sin x$.

Exercice 2 –

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{Arccos} \cos x = x_0$.
2. Même question avec $\text{Arccos} \cos x = x$.

Exercice 3 – Soit f la fonction définie par $f(x) = \text{Arctan} x + \text{Arctan} \frac{1}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, et étudier sa continuité et sa dérivabilité.
2. Calculer la dérivée de f, et en déduire une expression simplifiée de f.

Exercice 4 – En vous inspirant de l'exercice précédent, étudier les fonctions suivantes et simplifier leur expression.

$$a)\ f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right) \quad b)\ f(x) = 2\text{Arctan}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \text{Arcsin}(x)$$

$$c)\ f(x) = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \frac{x}{2} \quad d)\ f(x) = \text{Arccos}\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \text{Arcsin}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Exercice 5 – Résoudre l'équation $2\text{Arcsin}(x) = \text{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ (on pourra faire un changement de variables).

Exercice 6 – Déterminer des équvalents simples des fonctions suivantes en x_0:

$$a)\ f(x) = \text{Arcsin}(x) - 1,\ x_0 = \frac{\pi}{2} \quad b)\ f(x) = \text{Arccos}(x), x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$c)\ f(x) = \text{Arctan}(x), x_0 = +\infty \quad d)\ f(x) = \text{Argsh}(x), x_0 = 0$$

$$e)\ f(x) = \text{Argch}(x) - 1, x_0 = 0 \quad f)\ f(x) = \text{Argth}(x), x_0 = +\infty.$$

Exercice 7 –

1. En résolvant l'équation $y = \text{sh} x$, exprimer $\text{Argsh}(y)$ à l'aide du logarithme népérien.
2. Même question pour $\text{Argch}(x)$ et $\text{Argth}(x)$.

Exercice 8 –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $\ln x = \text{Arctan } x + n\pi$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée x_n.
2. Montrer que la suite x_n tend vers $+\infty$.
3. Montrer que la suite $\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ est convergente, et préciser sa limite.
4. En déduire que la suite $S_n = \frac{1}{x_0} + \cdots + \frac{1}{x_n}$ converge.