Université Paris 6 — Janvier 2004
DEUG MIAS 12 - 2003/04 – 1er semestre
Analyse – Groupes 5/6

TD 9 – Formules de Taylor – Développements limités

Exercice 1 – Écrire le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre n de la fonction exponentielle entre 0 et x. En déduire une valeur approchée à 10^{-4} près de $\sqrt{e}$.

Exercice 2 – Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} < (1+x)^{\frac{1}{3}} < 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{16}.$$

Exercice 3 – À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 de $\sin x$ en 0, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait :

$$\left| \sin\left(\frac{1}{n}\sin x\right) - \frac{1}{n}\sin x \right| \leq \frac{C}{n^2}.$$

En déduire la limite quand $n \to \infty$ de $u_n = n \displaystyle\int_0^\pi \sin\left(\frac{1}{n}\sin x\right) \,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 – Soit $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 4$. Trouver les polynômes g telles que pour tout x on ait $g(x-3) = f(x)$.

Exercice 5 – Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, non constante, et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geqslant 0$. Montrer que f n'est pas majorée.

Exercice 6 – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $[0,1]$, telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$, et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $|f''(c)| \geqslant 4$. (Indication : formule de Taylor-Lagrange pour la fonction g définie par $g(x) = f(x) - f(1-x)$).

Exercice 7 – Le but de cet exercice est de montrer que e est irrationnel. On suppose que $e = \frac{m}{n}$, avec $m, n \in \mathbb{N}$. Quitte à multiplier m et n par un même coefficient, on peut supposer que $n >$ e.

1. Montrer que $0 < \mathrm{e} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!}$.
2. En déduire une contradiction.

Exercice 8 – Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, non identiquement nulle. On suppose qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N(f^{(n)})} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{N(f)},$$

où, $N(g)$ désigne $\sup_{[0,1]} |g|$. Indication : formule de Taylor-Lagrange entre a et x_0, où $|f(x_0)| = N(f)$; pourquoi existe-t-il un tel x_0?

Exercice 9 –

1. Soit f, une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$ si et seulement si $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$.
2. Soit f la fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \cos\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\right)$ si $x \neq 0$. Montrer que pour tout n, f admet un développement limité à l'ordre n en 0, mais que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 10 – Déterminer les développements limités en x_0 à l'ordre 5 des fonctions des exercices 4 et 8 de la feuille 5.

Exercice 11 – Calculer les développements limités en 0 à l'ordre indiqué de:

a) $\mathrm{sh}x\ \mathrm{ch}2x$ (ordre 4) *b)* $\mathrm{e}^{\sin 2x}$ (ordre 5) *c)* $\ln(1+\mathrm{sh}x)$ (ordre 4)

d) $\mathrm{e}^{\cos x}$ (ordre 4) *e)* $\sqrt{1+\cos x}$ (ordre 4) *f)* $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2(1-x)}{1+4x}\right)$ (ordre 8)

g) $\dfrac{x^3}{\mathrm{sh}^3(x)}$ (ordre 5) *h)* $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$ (ordre 5) *i)* $\dfrac{1}{\mathrm{ch}x}$ (ordre 6)

j) $\mathrm{th}(x+\ln 2)$ (ordre 4) *k)* $\mathrm{Arcsin}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ (ordre 4) *l)* $(1-x\sin x)^{\frac{1}{x}}$ (ordre 5)

m) $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ (ordre 3) *n)* $\mathrm{e}^{\sqrt{4+x}}$ (ordre 4) *o)* $\mathrm{Arcsin}(\mathrm{Arcsin}x)$ (ordre 9)

p) $\sqrt{1+x-x^2}-(\cos x)^{\frac{1}{3}}$ (ordre 6) *q)* $\ln\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$ (ordre 7) *r)* $\dfrac{\cos x-\cos 5x}{\sin x-\sin 5x}$ (ordre 5)

s) $\mathrm{e}^{\frac{\cos x}{\mathrm{ch}x}}$ (ordre 4) *t)* $\dfrac{1}{x}\mathrm{Arccos}\sqrt{\dfrac{x}{\tan x}}$ (ordre 3) *u)* $\dfrac{1}{x}\mathrm{Arccos}\dfrac{\sin x}{x}$ (ordre 5)

v) $\mathrm{ch}(\sin x)-\cos(\mathrm{sh}x)$ (ordre 8) *w)* $\sin(x-\mathrm{Arctan}x)$ (ordre 11) *x)* $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$ (ordre 3)

Exercice 12 – Calculer les limites en x_0 des fonctions suivantes:

a) $\dfrac{\tan^n x-1}{2\sin^2 x-1}$ $(x_0=\dfrac{\pi}{4})$ *b)* $\dfrac{2}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\ln\sin x}$ $(x_0=\dfrac{\pi}{2})$ *c)* $\dfrac{\sin^{p+q} x-1}{(\sin^p x-1)(\sin^q x-1)}$ $(x_0=\dfrac{\pi}{2})$

d) $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ $(x_0=0)$ *e)* $x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ $(x_0=+\infty)$ *f)* $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$ $(x_0=0)$

g) $\dfrac{\sin x(\mathrm{th}x-x)}{x^2\ln(1+2x^2)}$ $(x_0=0)$ *h)* $\dfrac{\sin x-\tan x}{1-x+\ln(1+x)-\cos x}$ $(x_0=0)$ *i)* $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}$ $(x_0=2)$

Exercice 13 – Déterminer un équivalent simple en x_0 de:

a) $\mathrm{e}^x-x^{\mathrm{e}}-(\mathrm{e}-1)$ $(x_0=1)$ *b)* $\mathrm{e}^x-x^{\mathrm{e}}$ $(x_0=\mathrm{e})$ *c)* $\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}$ $(x_0=0)$

d) $x^x-\sin x^{\sin x}$ $(x_0=0^+)$ *e)* $\dfrac{(\tan x)^x-x^{\tan x}}{(\mathrm{th}x)^x-x^{\mathrm{th}x}}$ $(x_0=0^+)$ *f)* $\mathrm{sh}(\sin x)-\sin(\mathrm{sh}x)$ $(x_0=0)$

g) $\mathrm{Arctan}(x-x\cos x)$ $(x_0=0)$ *h)* $\mathrm{Arctan}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}-\dfrac{\pi}{2}$ $(x_0=0)$ *i)* $\dfrac{\mathrm{Argsh}\frac{1}{x}}{\mathrm{Argch}\frac{1}{x}}-1$ $(x_0=0)$

Exercice 14 – Soit $f(x)=\left[\dfrac{1}{\sin\frac{1}{x}}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right]\sqrt{x^2+1}$

1. Donner un équivalent de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une asymptote au graphe de f et la position relative des deux courbes.
3. Mêmes questions avec $f(x)=(x+1)^2\exp\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$.