Université Paris 6 Mai 2004

DEUG SCM 23 - 2003/04 – 2nd semestre

Math 4

Correction du devoir 2 – Intégrales multiples, intégrales curvilignes

Exercice 1 – Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$. On note $I(a) = \displaystyle\int_0^a e^{-t^2}dt$

1. La fonction $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue, donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$. D'autre part, $t^2 f(t) = t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}$ tend vers 0 en $+\infty$. Par conséquent, d'après le critère de Riemann, l'intégrale converge à la borne $+\infty$. D'où l'existence de I.

2. Soit, pour $a > 0$, $\Delta_a = [0,a]\times[0,a]$ et C_a le quart de disque défini par $x^2+y^2 \leq a^2$, pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

   (a) Soit $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ et $b = a\sqrt{2}$. Alors, on a les inclusions $C_a \subset \Delta_a \subset C_b$. Comme $f(x,y)$ est positive sur $\mathbb{R}^2$, on en déduit les inégalités
   $$\iint_{C_a} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{\Delta_a} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{C_b} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

   (b) Pour calculer $\displaystyle\iint_{C_a} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, on effectue le changement de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, d'où $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. Ainsi :
   $$\begin{aligned}\iint_{C_a} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{[0,a]\times[0,\frac{\pi}{2}]} r\ \mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\ \mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{r^2}\right]_0^a\\ &= \frac{\pi}{4}(1-\ \mathrm{e}^{-a^2}).\end{aligned}$$

   (c) On remarque que
   $$\iint_{\Delta_a} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[0,a]\times[0,a]} \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = I(a)^2.$$
   Par conséquent, d'après les questions précédentes,
   $$\frac{\pi}{4}(1-\ \mathrm{e}^{-a^2}) \leqslant I(a)^2 \leqslant \frac{\pi}{4}(1-\ \mathrm{e}^{-2a^2}).$$
   Or, lorsque a tend vers $+\infty$, les expressions de droite et de gauche tendent toutes deux vers $\frac{\pi}{4}$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $I(a)^2$ tend vers $\frac{\pi}{4}$. Or, la limite de $I(a)$ est I. Par conséquent, $I^2 = \frac{\pi}{4}$, d'où, puisque $I \geqslant 0$,
   $$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 2 –

1. Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}$. Cette fonction est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, donc localement intégrable. Il faut étudier la convergence à la borne $\frac{\pi}{2}$. Lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ tend vers 0, donc

$$f(x) = \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x} \sim_{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x} = 1.$$

Par conséquent, f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$, en posant $f(\frac{\pi}{2}) = 1$. Ainsi, l'intégrale I n'est en fait pas impropre.

2. On note $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. Alors

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\sin y}{1+\cos x \cos y}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{1+\cos x\cos y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{\cos x} \ln(1+\cos x \cos y) \right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x} \mathrm{d}x = I.
\end{aligned}$$

3. On effectue les intégrations dans le sens inverse : on commence par le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{1+\cos x \cos y} \mathrm{d}x$ en effectuant un changement de variables $t = \tan\dfrac{x}{2}$. On obtient alors $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}$ et $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{1+\cos x \cos y} \mathrm{d}x &= 2\sin y \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)+(1-t^2)\cos y}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{2\sin y}{1+\cos y} \int_0^1 \frac{1}{1+\left(t\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}\right)^2}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{2\sin y}{1+\cos y} \sqrt{\frac{1+\cos y}{1-\cos y}}\, \mathrm{Arctan} \sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}} \\
&= \frac{2\sin y}{\sqrt{1-\cos^2 y}}\, \mathrm{Arctan} \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{y}{2}}{\cos^2 \frac{y}{2}}} \\
&= 2\,\mathrm{Arctan}\left(\tan\frac{y}{2}\right) = y
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$I = \iint_D \frac{\sin y}{1+\cos x\cos y}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{1+\cos x \cos y} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\, \mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 3 –

1. Calculer $\displaystyle\int_{AB} (x+y)(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$, où AB désigne le chemin d'origine $A = (2,0)$ et d'extrémité $B = (0,0)$, dans les cas suivants :

   (a) AB est le segment de droite $[AB]$; on paramètre AB de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2-t \\ y = 0 \end{array} \right| , t \in [0,2] \qquad \text{d'où} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = 0. \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$\int_{AB} (x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y) = \int_0^2 -(2-t)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{(t-2)^2}{2}\right]_0^2 = -2.$$

(b) AB est le demi-cercle inférieur de diamètre $[AB]$; on paramètre AB par :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+\cos t \\ y = -\sin t \end{array}\right| , t \in [0,\pi] \qquad \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}x = -\sin t\ \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = -\cos t\ \mathrm{d}t. \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{AB} (x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y) &= \int_0^\pi (1+\cos t - \sin t)(-\cos t - \sin t)\ \mathrm{d}t \\ &= -\int_0^\pi (\cos t + \sin t + \cos^2 t - \sin^2 t)\ \mathrm{d}t \\ &= -\int_0^\pi (\cos t + \sin t + \cos(2t))\ \mathrm{d}t \\ &= -\left[\sin t - \cos t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^\pi = -2. \end{aligned}$$

(c) AB est l'arc supérieur de l'ellipse d'équation $(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$; on paramètre AB par :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+\cos t \\ y = 2\sin t \end{array}\right| , t \in [0,\pi] \qquad \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}x = -\sin t\ \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y = 2\cos t\ \mathrm{d}t. \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{AB} (x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y) &= \int_0^\pi (1+\cos t + 2\sin t)(2\cos t - \sin t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi (2\cos t - \sin t + 2\cos^2 t - 2\sin^2 t + 3\cos t \sin t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi (2\cos t - \sin t + 2\cos(2t) + \frac{3}{2}\sin(2t))\ \mathrm{d}t \\ &= \left[2\sin t + \cos t + \sin(2t) - \frac{3}{4}\cos(2t)\right]_0^\pi = -2. \end{aligned}$$

2. La valeur de l'intégrale ne dépend pas du chemin reliant $(2,0)$ et $(0,0)$. Cela provient du fait que la forme $\omega = (x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$ est exacte. En effet, en posant $f(x) = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}$, on remarque que $\mathrm{d}f = \omega$. Ainsi, quelque soit le chemin AB reliant $(2,0)$ et $(0,0)$,

$$\int_{AB} (x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y) = f(0,0) - f(2,0) = -2. \tag{1}$$

Remarque : L'indépendance vis-à-vis du chemin provient d'une propriété moins forte sur ω : cette forme est fermée (c'est-à-dire que si on écrit $\omega = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$). Alors, en utilisant la formule de Green-Riemann sur le contour consitué d'un chemin suivi d'un deuxième chemin parcouru en sens inverse (ce qu'on peut faire car ω est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$), on obtient l'égalité des intégrales sur les deux chemins. Remarquer qu'une forme exacte est toujours fermée, mais que l'inverse n'est pas vrai. Ce raisonnement est donc plus général, mais a l'inconvénient de ne pas donner la valeur de l'intégrale par une formule simple comme (1).

Exercice 4 – (Hors programme) Soit la surface définie par les équations

$$\left\{\begin{array}{l} x(\theta,t) = t\ \mathrm{e}^{\theta}\cos\theta \\ y(\theta,t) = t\ \mathrm{e}^{\theta}\sin\theta \\ z(\theta,t) =\ \mathrm{e}^{\theta}. \end{array}\right| , \theta \in [0, 2\pi],\ \ t \in [0, 1].$$

On note $F(\theta,t) = \begin{pmatrix} x(\theta,t) \\ y(\theta,t) \\ z(\theta,t) \end{pmatrix}$. Alors l'aire est

$$A = \iint_{[0,2\pi]\times[0,1]} \left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial F}{\partial t} \right\| \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}t.$$

Or,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} t\ \mathrm{e}^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta) \\ t\ \mathrm{e}^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta) \\ \mathrm{e}^{\theta} \end{pmatrix} \ \text{ et } \ \frac{\partial F}{\partial t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\theta}\cos\theta \\ \mathrm{e}^{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le produit vectoriel (voir vos cours du secondaire) vaut :

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial F}{\partial t} = \begin{pmatrix} -\ \mathrm{e}^{2\theta}\sin\theta \\ \mathrm{e}^{2\theta}\cos\theta \\ \mathrm{e}^{2\theta} t \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial F}{\partial t} \right\| =\ \mathrm{e}^{2\theta}\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + t^2} =\ \mathrm{e}^{2\theta}\sqrt{1+t^2}.$$

On obtient donc

$$A = \iint_{[0,2\pi]\times[0,1]} \mathrm{e}^{2\theta}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\theta \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{4\pi}-1}{2} \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t.$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t$, on fait le changement de variables $t = \operatorname{sh} u$, d'où $\mathrm{d}t = \operatorname{ch} u\ \mathrm{d}u$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\ \mathrm{d}t &= \int_0^{\operatorname{Argsh}(1)} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\operatorname{ch} u\ \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\operatorname{Argsh}(1)} \operatorname{ch}^2 u\ \mathrm{d}u = \int_0^{\operatorname{Argsh}(1)} \frac{1+\operatorname{ch}(2u)}{2}\ \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Argsh}(1) + \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2\operatorname{Argsh}(1)). \end{aligned}$$

Or,

$$\operatorname{sh}(2\operatorname{Argsh} 1) = 2\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh}(1))\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(1)) = 2\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(1)) = 2\sqrt{1+\operatorname{sh}(\operatorname{Argsh} 1)} = 2\sqrt{2}.$$

Finalement,

$$A = \frac{\mathrm{e}^{4\pi}-1}{4}(\operatorname{Argsh}(1) + \sqrt{2}).$$